詳細解答

STEP II 2007，第 12 題

概率與統計 • 幾何分佈的最大值

STEP II 2007，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/07-s2-q12

關鍵思路

先撇開題目對程序那段頗為繁瑣的描述，逐顆骰子單獨來看。每顆骰子都一直擲到首次出現六點為止，而整個實驗在兩顆骰子中較慢的那一顆擲出六點時結束。因此，擲骰次數就是兩個獨立（independent）幾何隨機變數（geometric random variable）的最大值，而處理最大值最方便的途徑，是考慮累積概率（cumulative probability）$\mathrm{P}(\max \le r)$。

解答

第 (i) 部分

設 X 為第一顆骰子首次出現六點時的擲骰次序，並以同樣方式為第二顆骰子定義 Y。骰子的每一次投擲都與其他各次投擲獨立，所以 X 與 Y 獨立，而且兩者都服從幾何分佈：

$$\mathrm{P}(X = k) = q^{k-1}p, \qquad \mathrm{P}(X \le r) = 1 - \mathrm{P}(\text{首 } r \text{ 次投擲全非六點}) = 1 - q^r.$$

題目的程序怎樣與此吻合？當兩顆骰子都未出現過六點時，我們兩顆一起擲；一旦其中一顆出現了六點，便只繼續擲另一顆。無論哪種情況，每顆骰子都恰好擲到它首次出現六點為止（之後不再擲），而當兩顆都出現過六點，我們便立即停止。如果兩顆骰子在同一次投擲中首次出現六點，那就是兩顆同時擲出六點的情況。因此擲骰次數為

$$N = \max(X, Y).$$

? **想一想** 為甚麼要處理 $\mathrm{P}(N \le r)$，而不直接處理 $\mathrm{P}(N = r)$？

事件 $N \le r$ 就是「$X \le r$ 而且 $Y \le r$」，而獨立性可把它化為乘積。事件 $N = r$ 則要分成幾種麻煩的情況（一顆骰子在第 r 次完成而另一顆較早完成，或兩顆都在第 r 次完成）。

所以

$$\mathrm{P}(N \le r) = \mathrm{P}(X \le r)\,\mathrm{P}(Y \le r) = (1-q^r)^2,$$

而對於 $r \ge 1$，

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(N = r) &= \mathrm{P}(N \le r) - \mathrm{P}(N \le r-1) \\
&= (1-q^r)^2 - (1-q^{r-1})^2 \\
&= \left[(1-q^r) - (1-q^{r-1})\right]\left[(1-q^r) + (1-q^{r-1})\right] \\
&= (q^{r-1} - q^r)(2 - q^{r-1} - q^r) \\
&= pq^{r-1}\,(2 - q^{r-1} - q^r),
\end{aligned}$$

當中先用了平方差(difference of two squares)，再用了 $q^{r-1} - q^r = q^{r-1}(1-q) = pq^{r-1}$。這就是所要求的結果。

至於期望值（expectation），把這個概率拆成兩部分：

$$\mathrm{P}(N = r) = 2pq^{r-1} - pq^{2r-2}(1+q).$$

把題目給出的結果求導（或把它除以 x），可得對於 $|x| < 1$ 有 $\sum_{r\ge1} rx^{r-1} = (1-x)^{-2}$。分別取 $x = q$ 和 $x = q^2$ 代入（當 $0 < p \le 1$ 時兩者都小於 1）：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(N) &= 2p\sum_{r=1}^{\infty} rq^{r-1} - p(1+q)\sum_{r=1}^{\infty} r(q^2)^{r-1} \\
&= \frac{2p}{(1-q)^2} - \frac{p(1+q)}{(1-q^2)^2} \\
&= \frac{2}{p} - \frac{p(1+q)}{p^2(1+q)^2} \\
&= \frac{2}{p} - \frac{1}{p(1+q)} \\
&= \frac{1+2q}{p(1+q)},
\end{aligned}$$

其中用了 $1-q = p$ 和 $1-q^2 = (1-q)(1+q) = p(1+q)$。若只以 p 表示（代入 $q = 1-p$），

$$\mathrm{E}(N) = \frac{3-2p}{p(2-p)}.$$

第 (ii) 部分

進行大量實驗後，擲骰次數的平均值應接近 $\mathrm{E}(N)$，所以我們解 $\mathrm{E}(N) = m$ 來估計 p：

$$m\,p(2-p) = 3-2p \quad\Longleftrightarrow\quad mp^2 - 2(m+1)p + 3 = 0,$$

所以

$$p = \frac{(m+1) \pm \sqrt{(m+1)^2 - 3m}}{m} = \frac{m+1 \pm \sqrt{m^2 - m + 1}}{m}.$$

想一想 我們要取哪一個根？

每次實驗最少要擲一次，所以 $m \geq 1$。於是 $\sqrt{m^2-m+1} \geq 1$（因為 $m^2-m = m(m-1) \geq 0$），所以取正號的根至少是 $(m+2)/m > 1$，這對概率來說是不可能的。根據同一個不等式，取負號的根至多是 $m/m = 1$，而且它是正數，因為 $(m+1)^2 > m^2-m+1$。所以估計值為

$$\hat{p} = \frac{m+1-\sqrt{m^2-m+1}}{m}.$$

驗算

- 若 $p = 1$，每次實驗都只需擲一次：$\mathrm{E}(N) = \frac{1}{1\cdot 1} = 1$，而 $m = 1$ 給出 $\hat{p} = (2-1)/1 = 1$。
- 各概率之和為 1：$\sum_r \mathrm{P}(N = r)$ 逐項相消（telescope）後得 $\lim_{r\to\infty}(1-q^r)^2 = 1$。
- 對於公平的骰子，$p = \frac{1}{6}$ 給出 $\mathrm{E}(N) = \frac{8/3}{11/36} = \frac{96}{11} \approx 8.73$，比一顆骰子平均所需的 6 次稍多，這正合預期。一次包含 200,000 次實驗的模擬得出平均值 8.71，而把 $m = 96/11$ 代入 $\hat{p}$ 的公式，則得回 $\frac{1}{6}$。

常見錯誤

- 把每顆骰子的投擲分開計算：兩顆骰子同時擲一次只算作一次投擲，這正是 $N = \max(X, Y)$ 的原因。
- 忘記 $pq^{2r-2}(1+q)$ 這一項所需的求和是取 $x = q^2$，而不是 $x = q$。
- 在第 (ii) 部分保留兩個根，而沒有檢查哪一個才可以是概率。

STEP 之外

$\mathrm{P}(\max \leq r) = \prod \mathrm{P}(X_i \leq r)$ 這個技巧，是處理獨立變數的最大值（把符號換成 $\geq$ 則可處理最小值）的標準方法，也是順序統計量（order statistics）的起點。第 (ii) 部分用的是矩估計法（method of moments）：令樣本平均值等於理論平均值，再解出參數。大學一年級的統計學會把它與最大似然法（maximum likelihood）比較，並探討這類估計量（estimator）有多準確。至於概率方面，Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）是很好的下一步。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。