詳細解答

STEP II 2007，第 11 題

力學 • 三維空間中的拋體

STEP II 2007，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/07-s2-q11

關鍵思路

把整個運動寫成一個位置向量（position vector）：水平速度保持不變，只有垂直分量受重力影響。一旦把 $\mathbf{r}(t)$ 寫在紙上，與 O 的距離就是 $|\mathbf{r}|$，而最短距離只需求一個二次式的最小值便可得到。最後一部分之所以行得通，是因為子彈極快，在它飛行期間質點幾乎沒有移動。

解答

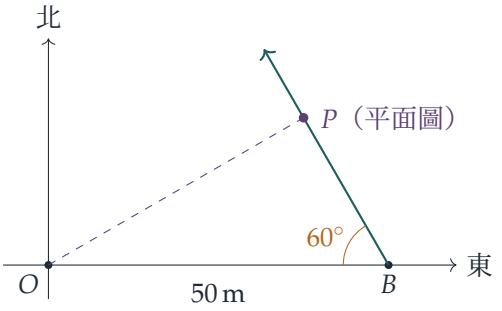
我們把質點（particle）視為只在重力作用下運動的一點（$g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，不計空氣阻力），並取 O 為原點，於是 B 的位置向量為 $50\mathbf{i}$。

第 (i) 部分

初速度的分量。若 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$，則 $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 及 $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$（邊長為 1、2、$\sqrt{5}$ 的三角形）。所以初速度的

$$\text{水平速率為}25\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = 10\sqrt{5}, \qquad \text{垂直速率為}25\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = 5\sqrt{5}.$$

水平方向是哪一邊？該方向與直線 OB 成 60° 角。假如質點大致朝東、遠離 O 而去，它根本不可能經過 O 附近；要從 O 的北面經過，它必須折返向西並偏向北方。所以水平方向與 $\overrightarrow{BO}$（向西）成 60° 角，並在其北側，由此得單位向量（unit vector）$-\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$。



因此水平速度為

$$10\sqrt{5}\left(-\tfrac{1}{2}\mathbf{i}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\right)=-5\sqrt{5}\,\mathbf{i}+5\sqrt{15}\,\mathbf{j},$$

而且它保持不變，因為重力只沿垂直方向作用。垂直方向上，$z=5\sqrt{5}\,t-\frac{1}{2}(10)t^2$。加上起點 $50\mathbf{i}$，得

$$\mathbf{r}(t)=(50-5\sqrt{5}\,t)\mathbf{i}+5\sqrt{15}\,t\,\mathbf{j}+(5\sqrt{5}\,t-5t^2)\mathbf{k}.$$

與 O 的距離。把各分量平方後相加，

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}|^2&=(2500-500\sqrt{5}\,t+125t^2)+375t^2+(125t^2-50\sqrt{5}\,t^3+25t^4)\\&=25t^4-50\sqrt{5}\,t^3+625t^2-500\sqrt{5}\,t+2500.\end{aligned}$$

把它與下式比較：

$$\begin{aligned}25(t^2-\sqrt{5}\,t+10)^2&=25(t^4+5t^2+100-2\sqrt{5}\,t^3+20t^2-20\sqrt{5}\,t)\\&=25t^4-50\sqrt{5}\,t^3+625t^2-500\sqrt{5}\,t+2500,\end{aligned}$$

兩者相同。所以 $|\mathbf{r}|=5\,|t^2-\sqrt{5}\,t+10|$。二次式 $t^2-\sqrt{5}\,t+10$ 的判別式（discriminant）為 $5-40<0$，故它恆為正數，絕對值符號可以除去：

$$|\mathbf{r}|=5(t^2-\sqrt{5}\,t+10)\text{ m},$$

正是所求。

點 P。配方（completing the square）得

$$t^2-\sqrt{5}\,t+10=(t-\tfrac{\sqrt{5}}{2})^2+\tfrac{35}{4},$$

所以當 $t=\frac{\sqrt{5}}{2}$ 時距離最小，而最短距離為 $5\cdot\frac{35}{4}=\frac{175}{4}=43.75\,\text{m}$。代入 $t=\frac{\sqrt{5}}{2}$，此時 $\sqrt{5}\,t=\frac{5}{2}$ 及 $t^2=\frac{5}{4}$：

$$\overrightarrow{OP}=\tfrac{75}{2}\,\mathbf{i}+\tfrac{25\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{j}+\tfrac{25}{4}\,\mathbf{k}\quad\text{（單位為米）}.$$

$\overrightarrow{OP}$ 的水平部分，向東分量為 $\frac{75}{2}$，向北分量為 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$。方位角（bearing）θ 是由正北起順時針量度的，所以

$$\tan\theta = \frac{\text{東}}{\text{北}} = \frac{75/2}{25\sqrt{3}/2} = \sqrt{3},$$

又因為兩個分量均為正數，故 $\theta = 60°$：由 O 測得 P 的方位角為 060°。

第 (ii) 部分

速度的垂直分量為

$$\dot{z} = 5\sqrt{5} - 10t,$$

它恰好在 $t = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 時為零。這正是質點位於 P 的時刻，所以質點在 P 處達到最高點（高度為 $\frac{25}{4}$ m）。

第 (iii) 部分

子彈以 $350\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 沿直線由 O 飛往 P（我們忽略重力對它的影響），所走的距離為 $OP = \frac{175}{4}$ m。所需時間為

$$T = \frac{175/4}{350} = \frac{1}{8}\,\mathrm{s}.$$

> **想一想** 多過了這 $\frac{1}{8}$ 秒之後，質點在哪裏？

由第 (ii) 部分，質點在 P 處的垂直速度為零，所以它在該處的速度純粹是水平的，大小為 $10\sqrt{5}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$。在其後的 T 秒內，它水平移動了 $10\sqrt{5}\,T$，並下墜了 $\frac{1}{2}gT^2$。取 $T = \frac{1}{8}$，

$$\text{水平位移} = \frac{10\sqrt{5}}{8} \approx 2.80\,\mathrm{m}, \qquad \text{下墜距離} = 5\cdot\frac{1}{64} \approx 0.08\,\mathrm{m}.$$

這兩段位移互相垂直，所以質點與 P 的距離為

$$\sqrt{\frac{500}{64} + \frac{25}{4096}} = \frac{5\sqrt{1281}}{64} \approx 2.80\,\mathrm{m},$$

即約為 3 m，正是所求。（下墜的影響微乎其微：答案基本上就是 $10\sqrt{5}/8$。）神槍手射失了。

驗算

- 當 $t = 0$ 時，公式給出 $5\cdot 10 = 50\,\mathrm{m}$，即距離 OB。吻合。
- $|\overrightarrow{OP}|^2 = 37.5^2 + 21.65^2 + 6.25^2 = 1406.25 + 468.75 + 39.06 = 1914.06 = 43.75^2$，所以 P 的位置向量與最短距離一致。

- 以數值方法掃描 $|\mathbf{r}(t)|$，得最小值 43.75 m，出現於 $t \approx 1.118 = \frac{\sqrt{5}}{2}$；再讓質點由 P 繼續運動 0.125 s，得相距 2.796 m。

常見錯誤

- 把水平方向取為 $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$（遠離 O）。這樣質點永遠不會從 O 的北面經過，距離也算不出題目所給的式子。
- 把方位角寫成 30°：那是由正東量起的角，但方位角是由正北起順時針量度的。

STEP 之外

第 (iii) 部分是攔截問題（interception problem）的入門版本：要擊中移動的目標，必須瞄準它將會到達的位置，這就要解 $|\mathbf{r}_{\text{目標}}(t) - \mathbf{r}_{\text{子彈}}(t)| = 0$，同時求出發射方向和時間。求 $|\mathbf{r}(t)|$ 的最小值，也正是軌道問題和碰撞問題中「最接近距離」（distance of closest approach）背後的想法；在這類問題中，把距離平方以得到多項式，是標準的第一步。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對這類向量運動學（vector kinematics）有嚴謹而完整的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。