詳細解答

# STEP II 2007，第 10 題

力學 • 涉及摩擦力的靜力學

> **STEP II 2007，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q10

## 關鍵思路

這是一道靜力學（statics）問題，唯一棘手的地方是質心（centre of mass）的位置。一旦知道 $G$ 在軸上的位置，對接觸點取力矩（taking moments）便可同時消去法向反作用力（normal reaction）和摩擦力（friction），直接求出 $P$。然後沿水平方向分解力，可知摩擦力的大小等於 $P$，餘下的交給摩擦定律 $|F| \leq \mu R$ 便可。式中出現絕對值（modulus），是因為視乎 $\alpha$ 的大小，$P$ 可能要推，也可能要拉。

## 解答

### 模型

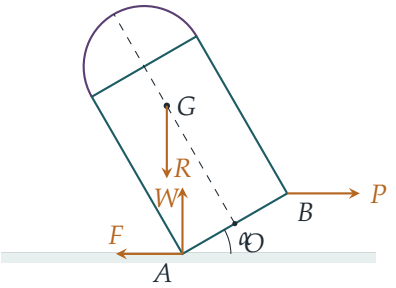
我們把這個立體視為剛體（rigid body），它與平面只在一點 $A$ 接觸，這一點是平底面（即圓柱體不與半球相連的一端）邊緣上的最低點。設 $B$ 為該底面的最高點，則 $AB$ 是一條長度為 $2r$ 的直徑，與水平方向成 $\alpha$ 角。作用力有：作用於質心 $G$ 的重量 $W$；作用於 $A$ 的法向反作用力 $R$ 和摩擦力 $F$；以及作用於 $B$ 的水平力 $P$。

### 質心

沿軸由底面的圓心 $O$ 起量度距離。圓柱體的體積為 $3\pi r^3$，故質量為 $3\pi r^3\rho$，其質心位於 $\frac{3}{2}r$ 處。半球的體積為 $\frac{2}{3}\pi r^3$，密度為 $3\rho$，故質量為 $2\pi r^3\rho$；它的質心在其平面之外 $\frac{3}{8}r$ 處，而該平面位於 $3r$ 處，所以質心位於 $\frac{27}{8}r$ 處。總質量為 $5\pi r^3\rho$，而

$$OG = \frac{3\cdot\frac{3}{2}r + 2\cdot\frac{27}{8}r}{5} = \frac{\frac{9}{2}r + \frac{27}{4}r}{5} = \frac{9}{4}r.$$

因此 $G$ 在軸上，距離底面 $\frac{9}{4}r$，並且 $W = 5\pi r^3\rho g$。




### 平衡

取 $A$ 為原點，$x$ 軸沿水平方向（由 $A$ 指向 $B$ 的垂足），$y$ 軸鉛垂向上。設 $P$ 在 $x$ 方向的水平分量為 $X$，故 $X$ 可正可負；同樣地，設摩擦力在 $x$ 方向為 $F$。

底面由 $A$ 出發，沿方向 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 伸展，所以 $B = (2r\cos\alpha,\, 2r\sin\alpha)$ 而 $O = (r\cos\alpha,\, r\sin\alpha)$。軸垂直於底面，指向立體內部，方向為 $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$。因此 $G$ 的水平坐標為

$$x_G = r\cos\alpha - \tfrac{9}{4}r\sin\alpha.$$

沿鉛垂方向分解，得 $R = W$。沿水平方向分解，得 $F + X = 0$，故 $|F| = |X|$。

**想一想** 我們應該對哪一點取力矩？

對 $A$ 取力矩：這樣 $R$ 和 $F$ 都沒有力矩，只剩下 $W$ 和 $P$。重量沿鉛垂方向作用並通過 $G$，所以它對 $A$ 的力矩為 $Wx_G$（當 $x_G > 0$ 時為順時針方向）。作用於 $B$ 的水平力位於高度 $2r\sin\alpha$ 處，所以它的力矩為 $X \cdot 2r\sin\alpha$（當 $X < 0$ 時為逆時針方向，當 $X > 0$ 時為順時針方向）。取順時針方向為正，

$$Wx_G + 2r\sin\alpha\, X = 0 \quad\Longrightarrow\quad X = -\frac{W\left(r\cos\alpha - \frac{9}{4}r\sin\alpha\right)}{2r\sin\alpha} = W\left(\tfrac{9}{8} - \tfrac{1}{2}\cot\alpha\right),$$

其中我們除以了 $\sin\alpha$，由於 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$，它是正數。

### 摩擦條件

由於平面是粗糙的，而立體在 $A$ 處不滑動，我們需要 $|F| \le \mu R$。利用 $|F| = |X|$ 和 $R = W > 0$，

$$W\left|\tfrac{9}{8} - \tfrac{1}{2}\cot\alpha\right| \le \mu W \quad\Longrightarrow\quad \mu \ge \left|\tfrac{9}{8} - \tfrac{1}{2}\cot\alpha\right|,$$

這正是所要求的結果。

$X$ 的正負號告訴我們 $P$ 的作用方向。若 $\tan\alpha > \frac{4}{9}$，則 $G$ 越過了 $A$，位於遠離 $B$ 的一側，立體本身會向後翻倒，因此 $P$ 必須把 $B$ 向外拉離立體；若 $\tan\alpha < \frac{4}{9}$，則 $P$ 必須向內推。無論哪種情況，摩擦力都與 $P$ 方向相反，而絕對值正好涵蓋這兩種情況。

## 驗算

- 若 $\tan\alpha = \frac{4}{9}$，則 $x_G = 0$：$G$ 在 $A$ 的正上方，立體自行平衡，$P = 0$，無需摩擦力。所得的界給出 $\mu \geq |\frac{9}{8} - \frac{9}{8}| = 0$，與預期相符。
- 當 $\alpha = 45°$ 時，所得的界為 $\mu \geq \frac{5}{8}$。
- 以數值方法驗證：把立體切成薄圓片，得總質量為 $5\pi\rho r^3$ 及 $OG = 2.2500r$；再對 10 000 個隨機的 $\alpha$ 值直接解三條平衡方程，每次所得的 $|F|/R$ 都等於 $|\frac{9}{8} - \frac{1}{2}\cot\alpha|$。

## 常見錯誤

- 忘記半球的密度是三倍，因而把它的質量當作 $\frac{2}{3}\pi r^3\rho$；這會令 $G$ 的位置改變，常數 $\frac{9}{8}$ 也隨之改變。
- 把半球質心的 $\frac{3}{8}r$ 由圓柱體的底面量起，而不是由半球本身位於高度 $3r$ 的平面量起。
- 預先假定 $P$（或摩擦力）的方向，因而漏掉絕對值：無論 $P$ 向哪一方作用，結果都必須成立。

## STEP 之外

求組合體的質心，其實是體積分（volume integral）的離散版本：$\bar{\mathbf{r}} = \int \rho\,\mathbf{r}\,\mathrm{d}V \big/ \int \rho\,\mathrm{d}V$，而半球的 $\frac{3}{8}r$ 本來就是這樣推導出來的。在大學一年級的力學課程中，這會發展成剛體理論，其中把同樣的積分裏的 $\mathbf{r}$ 換成 $r^2$，便得到轉動慣量（moments of inertia）。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）對這兩個概念都有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。