詳細解答

STEP II 2007，第 1 題

純數學 • 二項式近似

> **STEP II 2007，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q1

關鍵思路

二項式級數（binomial series）只有在那個「小量」真的很小時才會快速收斂（converge），所以整道題的關鍵，就是把根式（surd）改寫成 $\sqrt{1+\text{某個極小的數}}$ 的簡單有理數倍。為此，我們要找一個完全平方數（或完全立方數），使它乘以 3 或 6 之後剛好落在 10 的某個冪旁邊。這樣 k 相對於 100（或 1000）就很小，只需寥寥數項便能達到所需的準確度。

解答

第 (i) 部分

設 $x=\frac{k}{100}$，$(1+x)^{1/2}$ 的二項式級數的係數為

$$\binom{\frac12}{1}=\frac12,\qquad \binom{\frac12}{2}=\frac{\frac12\cdot(-\frac12)}{2!}=-\frac18,\qquad \binom{\frac12}{3}=\frac{\frac12\cdot(-\frac12)\cdot(-\frac32)}{3!}=\frac{1}{16}.$$

代入 $x=k/100$，得

$$\left(1+\frac{k}{100}\right)^{1/2}\approx 1+\frac{k}{200}-\frac{k^2}{80\,000}+\frac{k^3}{16\,000\,000}.$$

(a) 取 $k=8$，左方就是 $\sqrt{1.08}$，而關鍵在於 $108=3\times 36$：

$$\sqrt{1.08}=\frac{\sqrt{108}}{10}=\frac{6\sqrt3}{10}=\frac{3\sqrt3}{5},\qquad \text{所以}\qquad \sqrt3=\frac53\sqrt{1.08}.$$

由級數可得

$$\sqrt{1.08}\approx 1+0.04-0.0008+0.000032=1.039232,$$

因此

$$\sqrt{3} \approx \frac{5}{3} \times 1.039232 = 1.7320533\ldots \approx 1.73205\text{(準確至小數點後五位)。}$$

(b)

? **想一想** k 取甚麼值，才會令 $1 + \frac{k}{100}$ 等於某個簡單平方數的 6 倍？

我們希望 $100 + k = 6m^2$，其中 m 為整數，而且 $6m^2$ 接近 100，這樣 k 才會小。由於 $6 \times 16 = 96$，取 $m = 4$ 及 $k = -4$：

$$\sqrt{0.96} = \frac{\sqrt{96}}{10} = \frac{4\sqrt{6}}{10} = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \qquad \text{所以} \qquad \sqrt{6} = \frac{5}{2}\sqrt{0.96}.$$

當 $k = -4$ 時，首項之後的每一項都是負數：

$$\sqrt{0.96} \approx 1 - 0.02 - 0.0002 - 0.000004 = 0.979796,$$

於是

$$\sqrt{6} \approx \frac{5}{2} \times 0.979796 = 2.44949\text{(準確至小數點後五位)。}$$

這個 k 的大小只有 (a) 中的一半，所以這裏被略去的各項更加微小。(例如由 $1.5 = 6/4$ 得出的 $k = 50$，同樣可以準確地表示 $\sqrt{6}$，但當 $x = \frac{1}{2}$ 時，級數收斂得太慢，遠遠不足以準確至小數點後五位。)

第 (ii) 部分

取首兩項，得

$$\left(1 + \frac{k}{1000}\right)^{1/3} \approx 1 + \frac{k}{3000}.$$

? **想一想** 哪一個立方數乘以 3 之後，剛好略大於 1000？

我們需要 $1000 + k = 3m^3$，而且 k 要小。在 $1000/3 \approx 333$ 附近的立方數有 $6^3 = 216$ 和 $7^3 = 343$，而 $3 \times 343 = 1029$ 非常接近 1000。所以取 $k = 29$：

$$\sqrt[3]{1.029} = \frac{\sqrt[3]{3 \times 7^3}}{10} = \frac{7\sqrt[3]{3}}{10}, \qquad \text{所以} \qquad \sqrt[3]{3} = \frac{10}{7}\sqrt[3]{1.029}.$$

利用兩項的近似式，

$$\sqrt[3]{3} \approx \frac{10}{7}\left(1 + \frac{29}{3000}\right) = \frac{10}{7} \cdot \frac{3029}{3000} = \frac{3029}{2100},$$

這就是所求的近似值。

驗算

用計算機可得 $\sqrt{3} = 1.7320508\ldots$ 及 $\sqrt{6} = 2.4494897\ldots$，兩者都與上面的答案在小數點後五位之內吻合。至於第 (ii) 部分，$3029/2100 = 1.44238\ldots$，而 $\sqrt[3]{3} = 1.44225\ldots$。誤差約為 1.3×10^{-4}，與第一個被略去的項的大小 $\frac{10}{7} \cdot \frac{1}{9}\left(\frac{29}{1000}\right)^2 \approx 1.3 \times 10^{-4}$ 相符，所以這個近似值略為高估了真實值。

常見錯誤

- 算錯第三個係數：$\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2})/6 = +\frac{1}{16}$，而不是 $-\frac{1}{16}$。
- 計算級數之後，忘記乘回 $\frac{5}{3}$、$\frac{5}{2}$ 或 $\frac{10}{7}$。
- 選了一個很大的 k（例如 (b) 中的 $k = 50$），這時只取三四項根本遠遠不夠。

STEP 之外

究竟需要多少項，歸根究柢是要為泰勒級數（Taylor series）的餘項（remainder）定出上界。有了拉格朗日（Lagrange）餘項公式，你就可以證明（而不只是相信）這些近似值確實準確至小數點後五位。把問題重新縮放到級數快速收斂的範圍內，這個技巧正是計算機和電腦程式庫實際計算方根和對數的方法。關於泰勒級數及其餘項的理論，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本實分析入門教材）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。