詳細解答

STEP I 2007，第 9 題

力學 • 斜坡上的極限摩擦力

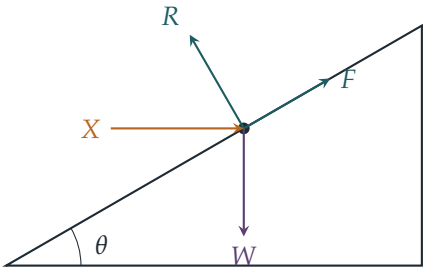
> **STEP I 2007，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q9

關鍵思路

這題是極限摩擦（limiting friction）的兩種情況，兩者的分別只在於摩擦力的方向。在每種情況下，我們沿斜面方向及垂直於斜面方向分解力，再消去法向反作用力（normal reaction），便可把每個水平力寫成 W 乘以一個三角函數式的比。將兩式相除可消去 W，剩下一條只涉及 k、μ 和 θ 的關係式。至於不等式，則來自 $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ 永遠不會超過 $\frac{1}{2}$ 這個事實。

解答

我們把物體模型化為質點(particle)，並假設兩種情況下摩擦力均達到極限，即 $F = \mu R$。為使代數運算簡潔，記 $s = \sin\theta$ 及 $c = \cos\theta$。



水平力把質點壓向斜面，所以它有一個沿斜面向上的分量 Xc，以及一個垂直壓向斜面的分量 Xs。重量則有沿斜面向下的分量 Ws 和垂直壓向斜面的分量 Wc。

即將下滑：力為 X

質點正處於即將向下滑動的狀態，所以摩擦力 μR 沿斜面向上（如圖所示）。先沿垂直於斜面的方向分解，再沿斜面方向分解，得

$$R = Wc + Xs, \qquad Xc + \mu R = Ws.$$

代入 R，

$$Xc + \mu Wc + \mu Xs = Ws \quad \Longrightarrow \quad X(c + \mu s) = W(s - \mu c). \tag{1}$$

即將上滑：力為 kX

現在質點正處於即將向上滑動的狀態，所以摩擦力沿斜面向下。同理，

$$R' = Wc + kXs, \qquad kXc = Ws + \mu R',$$

所以

$$kX(c - \mu s) = W(s + \mu c). \tag{2}$$

? **想一想** 這裏眼前的每一項，我們都可以隨意拿來做除數嗎？

可以，這是由題目的物理情境保證的。題目說需要一個正的力 X 才能阻止質點下滑，即是說沒有這個力質點便會滑下，這表示 $\tan\theta > \mu$，即 $s - \mu c > 0$。於是由 (1) 得 $X > 0$，而 $c + \mu s > 0$ 本來就成立。水平推力若要能夠把質點推上斜面，(2) 便需要 $c - \mu s > 0$，即 $\tan\theta < 1/\mu$。兩者合起來必有 $\mu < \tan\theta < 1/\mu$，特別是 $\mu < 1$；這一點到最後會用得着。

關係式

將 (2) 除以 (1)，X 和 W 同時消去：

$$k\,\frac{c - \mu s}{c + \mu s} = \frac{s + \mu c}{s - \mu c} \quad \Longrightarrow \quad k(c - \mu s)(s - \mu c) = (s + \mu c)(c + \mu s).$$

把兩邊展開，並利用 $s^2 + c^2 = 1$：

$$(c - \mu s)(s - \mu c) = sc - \mu c^2 - \mu s^2 + \mu^2 sc = (1 + \mu^2)sc - \mu,$$
$$(s + \mu c)(c + \mu s) = sc + \mu s^2 + \mu c^2 + \mu^2 sc = (1 + \mu^2)sc + \mu.$$

所以 $k(1 + \mu^2)sc - k\mu = (1 + \mu^2)sc + \mu$，整理後得

$$(k - 1)(1 + \mu^2)\sin\theta\cos\theta = \mu(k + 1),$$

這正是所需的結果。

不等式

右邊是正數（因為 $\mu > 0$ 及 $k > 0$），而當 θ 為銳角時 $(1+\mu^2)\sin\theta\cos\theta$ 亦是正數；因此 $k > 1$。（這並不令人意外：把質點推上去所需的力，自然比僅僅把它頂住的大。）現在

$$\sin\theta\cos\theta = \tfrac{1}{2}\sin 2\theta \leq \tfrac{1}{2},$$

而由於 $(k-1)(1+\mu^2) > 0$，我們可以把這個不等式兩邊乘以它：

$$\mu(k+1) = (k-1)(1+\mu^2)\sin\theta\cos\theta \leq \tfrac{1}{2}(k-1)(1+\mu^2).$$

兩邊乘以 2，再把含 k 的項集合起來：

$$2\mu k + 2\mu \leq k(1+\mu^2) - (1+\mu^2) \quad \Longrightarrow \quad k(1-2\mu+\mu^2) \geq 1 + 2\mu + \mu^2,$$

即 $k(1-\mu)^2 \geq (1+\mu)^2$。上文已證明 $\mu < 1$，所以 $(1-\mu)^2 > 0$，我們可以除以它而不改變不等號的方向：

$$k \geq \frac{(1+\mu)^2}{(1-\mu)^2}.$$

等號成立當且僅當 $\sin 2\theta = 1$，即 $\theta = 45°$。

> **想一想** 為甚麼在最後一步之前，必須先知道 $\mu < 1$？

若 $\mu = 1$，我們便是除以零（而且上一行會變成 $0 \geq 4$，這是錯的）；若 $\mu > 1$，相除雖然仍然合法，但 θ 須滿足的條件早已不成立。從物理上看，當 $\mu \geq 1$ 時，$\tan\theta > \mu \geq 1$ 和 $\tan\theta < 1/\mu \leq 1$ 這兩個要求互相矛盾：要麼質點根本不需要外力頂住，要麼任何水平推力都無法令它開始向上滑。所以題目其實隱含了 $\mu < 1$。

驗算

- 取 $\mu = \frac{1}{2}$ 及 $\theta = 45°$，則 $s = c = 1/\sqrt{2}$。由 (1) 和 (2)，$X = W \cdot \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}W$ 及 $kX = W \cdot \frac{3/2}{1/2} = 3W$，所以 $k = 9 = (1.5/0.5)^2$：這正是等號成立的情況。若改取 $\theta = 60°$，同樣的公式給出 $k \approx 25.2 > 9$。
- 若 $\mu \to 0$，則 $X = kX = W\tan\theta$ 且 $k \to 1$，這與恆等式（兩邊皆為 0）及下界 1 都吻合。
- 以數值方法檢驗恆等式和不等式：隨機選取 10^5 組 $\mu \in (0,1)$ 和符合條件的 θ，沒有發現任何反例。

常見錯誤

- 取 $R = W\cos\theta$：水平力同樣會把質點壓向斜面，令反作用力增加 $X\sin\theta$。

- 兩種情況下都讓摩擦力指向同一方向。摩擦力總是與即將發生的運動方向相反。
- 除以 $(1-\mu)^2$ 而沒有說明它為何是正數（且不等於零）。

STEP 之外

要看清這個結果，有一個巧妙的方法，就是引入*摩擦角*（angle of friction）λ，其中 $\tan\lambda = \mu$：法向反作用力與極限摩擦力可合成為單一個力，它與法線成 λ 角，而 (1) 和 (2) 則變成 $X = W\tan(\theta-\lambda)$ 及 $kX = W\tan(\theta+\lambda)$。所以 $k = \tan(\theta+\lambda)/\tan(\theta-\lambda)$，而該下界所說的，就是這個比在 $\theta = 45°$ 時最小。這類運用摩擦角的論證，以及「摩擦錐」（friction cone）的概念，在大學的靜力學（statics）和接觸理論中會再次出現。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對摩擦和受力分析的處理十分嚴謹，正合大學一年級課程的要求。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。