詳細解答

STEP I 2007，第 8 題

純數學 • 三次曲線的相切

> **STEP I 2007，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q8

關鍵思路

兩條曲線在某一點相切（touch），當且僅當求交點的方程在該處有重根（repeated root）。因此應考慮兩個三次式之差，並預期它含有因式 $(x-2)^2$。含 a 各項的係數 $1, -6, 12, -8$ 正是 $(x-2)^3$ 的二項式係數（binomial coefficients），看出這一點後，因式分解（factorisation）和繪畫略圖都會容易得多。

解答

在 $(2,8)$ 相切及另一個交點

把含 a 的各項歸在一起，

$$ax^3 - 6ax^2 + 12ax - 8a = a(x-2)^3, \qquad \text{所以} \qquad y = a(x-2)^3 + 12x - 16. \qquad (*)$$

它與 $y = x^3$ 的交點，就是下式的根：

$$a(x-2)^3 + 12x - 16 - x^3 = 0.$$

現在 $x^3 - 12x + 16$ 在 $x = 2$ 時為零，除去相應因式後得 $x^3 - 12x + 16 = (x-2)^2(x+4)$。因此

$$\begin{aligned} a(x-2)^3 + 12x - 16 - x^3 &= a(x-2)^3 - (x-2)^2(x+4) \\ &= (x-2)^2[(a-1)x - 2a - 4]. \end{aligned}$$

在 $x = 2$ 處，兩條曲線都通過 $(2,8)$，而因式 $(x-2)^2$ 表明 $x = 2$ 是交點方程的重根。等價地說，兩者的斜率（gradient）相同：由 $(*)$ 得 $y' = 3a(x-2)^2 + 12$，它在 $x = 2$ 時

等於 12，而 $y = x^3$ 在該處的斜率是 $3 \cdot 2^2 = 12$。所以對 a 的每一個值，兩條曲線都在 $(2, 8)$ 相切。

其餘的交點都來自 $(a-1)x = 2a + 4$。

- 若 $a \neq 1$，則 $x = \dfrac{2a+4}{a-1}$，而它永遠不會等於 2（否則需要 $2a + 4 = 2a - 2$）。所以恰好有另外一個交點，
$$\left(\frac{2a+4}{a-1}, \left(\frac{2a+4}{a-1} \right)^3 \right).$$
- 若 $a = 1$，方括號內是常數 -6，所以沒有其他交點。

想一想 哪一條曲線在上方？在甚麼範圍內？

因式分解已順帶回答了這個問題。由於 $(x-2)^2 \geq 0$，$(*)$ 減去 x^3 的正負號就是線性因式 $(a-1)x - 2a - 4$ 的正負號。由此可知曲線 $(*)$ 在另一個交點的哪一側位於 $y = x^3$ 之上，而繪畫略圖所需的資料，大部分就在這裏。

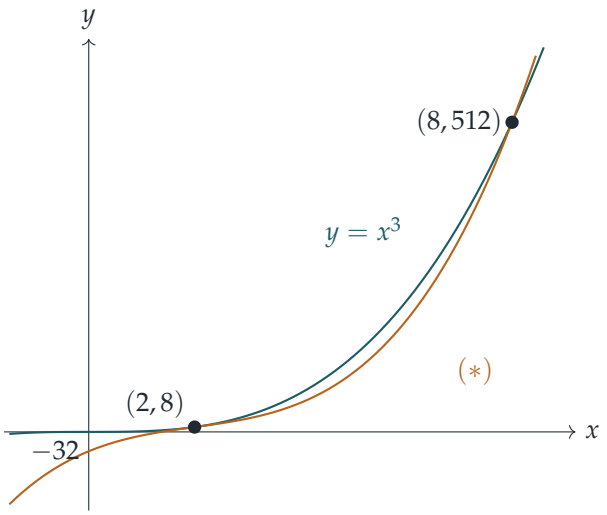
在全部三幅略圖中，$(*)$ 在 $(2, 8)$ 都有一個拐點（point of inflection），該處斜率為 12，因為當 $a \neq 0$ 時 $y'' = 6a(x-2)$ 在該處變號。所以 $(*)$ 與 $y = x^3$ 在 $(2, 8)$ 有共同的切線（tangent）$y = 12x - 16$；$y = x^3$ 在該處向上凹（concave up），而 $(*)$ 則不然。

第 (i) 部分：$a = 2$

這時 $y = 2(x-2)^3 + 12x - 16$，而

$$y - x^3 = (x-2)^2(x-8).$$

另一個交點是 $(8, 512)$。曲線 $(*)$ 在 $x < 8$ 時位於 $y = x^3$ 之下（在 $x = 2$ 處相切），在 $x > 8$ 時位於其上。它的斜率 $6(x-2)^2 + 12$ 恆為正數，所以它是遞增的，沒有轉向點（turning points）。它與 y 軸相交於 $(0, -32)$，並與 x 軸相交一次，位置在 $x \approx 1.37$ 附近。



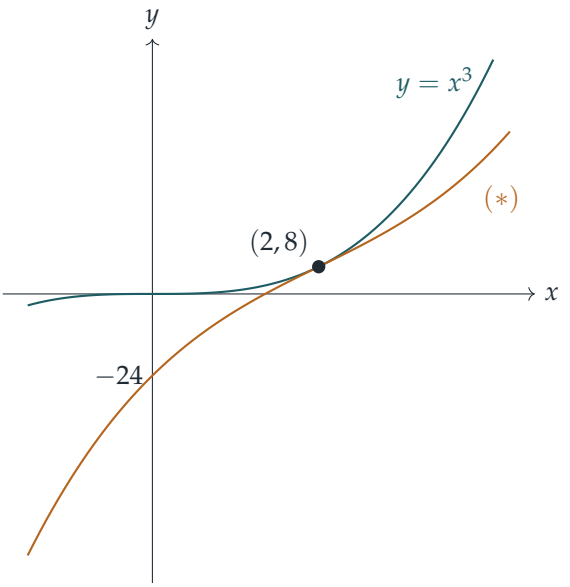
(縱向比例被大幅壓縮，所以在 $(2,8)$ 的相切看起來是平的；兩條曲線在該處有共同的切線。)

第 (ii) 部分：$a = 1$

這時 $y = (x-2)^3 + 12x - 16 = x^3 - 6x^2 + 24x - 24$，而

$$y - x^3 = -6(x-2)^2 \leq 0.$$

所以除了在 $(2,8)$ 相切之外，$(*)$ 處處位於 $y = x^3$ 之下；兩者沒有其他交點。無論向哪一個方向離開 $x = 2$，兩者的差距 $6(x-2)^2$ 都會愈來愈大。斜率 $3(x-2)^2 + 12$ 恆為正數，所以 $(*)$ 是遞增的。它與 y 軸相交於 $(0,-24)$，並與 x 軸相交一次，位置在 $x \approx 1.36$ 附近。



第 (iii) 部分： $a = -2$

現在另一個交點滿足 $x = \dfrac{-4+4}{-3} = 0$，所以它就是原點 $(0,0)$，而

$$y - x^3 = (x-2)^2(-3x) = -3x(x-2)^2.$$

所以 $(*)$ 在 $x < 0$ 時位於 $y = x^3$ 之上，在 $x > 0$ 時位於其下，並在 $(2,8)$ 相切。

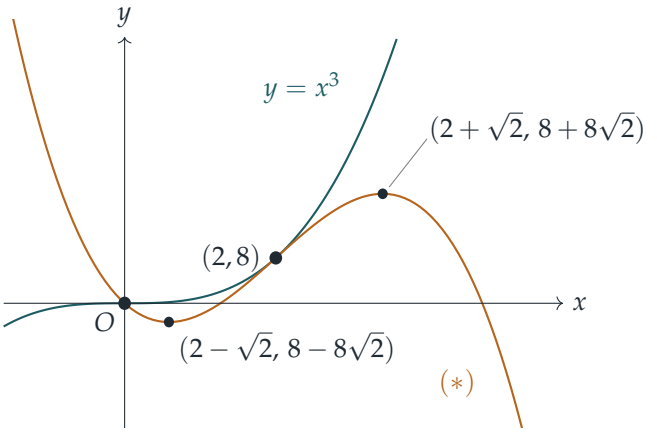
展開後，$y = -2(x-2)^3 + 12x - 16 = -2x^3 + 12x^2 - 12x = -2x(x^2 - 6x + 6)$，它與 x 軸相交於 $x = 0$ 和 $x = 3 \pm \sqrt{3}$（約為 1.27 和 4.73）。斜率是

$$y' = -6(x-2)^2 + 12,$$

它在 $(x-2)^2 = 2$ 時為零，即 $x = 2 \pm \sqrt{2}$。代入後，

$$x = 2 - \sqrt{2}: \quad y = 8 - 8\sqrt{2} \approx -3.31 \quad \text{(極小值)},$$
$$x = 2 + \sqrt{2}: \quad y = 8 + 8\sqrt{2} \approx 19.3 \quad \text{(極大值)}.$$

由於首項係數是負數，當 $x \to -\infty$ 時 $y \to +\infty$，當 $x \to +\infty$ 時 $y \to -\infty$。在原點，$(*)$ 的斜率是 -12，而 $y = x^3$ 的斜率是 0，所以兩條曲線在該處確實互相穿越。



驗算

- 在 $x = 2$ 處，對每一個 a，$(*)$ 都給出 $a \cdot 0 + 24 - 16 = 8$，且 $y' = 12$，與 $y = x^3$ 吻合。
- 取 $a = 2$ 和 $x = 8$，由簡潔的形式得 $2 \cdot 6^3 + 96 - 16 = 512 = 8^3$，確認了點 $(8, 512)$。
- 取 $a = 0$，$(*)$ 就是切線 $y = 12x - 16$，而公式給出另一個交點在 $x = -4$；事實上 $x^3 - 12x + 16 = (x-2)^2(x+4)$。
- 我們用數千組隨機有理數 a 和 x 精確地驗證了這個因式分解，並以數值方法核對了第 (iii) 部分的轉向值 $8 \pm 8\sqrt{2} \approx 19.31, -3.31$。

常見錯誤

- 遺漏 $a = 1$ 的情況：這時另一個交點的公式失效，因為根本沒有另一個交點。
- 只證明兩條曲線都通過 $(2, 8)$。相切還需要斜率相等，或等價地，需要有重根。
- 在第 (iii) 部分，把兩條曲線畫成在原點相切。它們在該處是互相穿越的，斜率並不相同。

STEP 之外

$f(x) - g(x)$ 的重根是相切在代數上的投影：兩條曲線在該點一階吻合。再推進一步，切觸階(order of contact)數算的是有多少階導數相同，而這正是泰勒多項式(Taylor polynomials）背後的想法：泰勒多項式就是在某一點與函數有最高可能切觸階的多項式。Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（實分析入門）嚴謹地建立了泰勒定理。

Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等數學難題集）有更多 STEP 風格的曲線描繪題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。