詳細解答

STEP I 2007，第 7 題

純數學 • 直線之間的距離

> **STEP I 2007，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q7

關鍵思路

在兩條直線上各寫出一個一般點，相減，再把長度平方：這樣 D^2 就是兩個參數（parameter）的二次式（quadratic）。竅門在於把這個二次式寫成平方和（sum of squares），因為當每個平方都取到最小時，平方和也就最小。在第 (ii) 部分，同樣的方法仍然適用，而對於不同的 k 值，這些平方如何拆開，正好告訴我們背後的幾何。

解答

第 (i) 部分

L_1 上的一般點是 $P = (1+2\lambda,\ 2\lambda,\ 2-3\lambda)$，$L_2$ 上的一般點是 $Q = (4+\mu,\ -2+2\mu,\ 9-2\mu)$。所以

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3+\mu-2\lambda \\ -2+2\mu-2\lambda \\ 7-2\mu+3\lambda \end{pmatrix}$$

而

$$D^2 = (3+\mu-2\lambda)^2 + (-2+2\mu-2\lambda)^2 + (7-2\mu+3\lambda)^2.$$

逐個係數合併同類項：

$$\mu^2:\quad 1+4+4=9, \qquad \lambda^2:\quad 4+4+9=17, \qquad \lambda\mu:\quad -4-8-12=-24,$$
$$\mu:\quad 6-8-28=-30, \qquad \lambda:\quad -12+8+42=38, \qquad \text{常數項}:\quad 9+4+49=62,$$

所以 $D^2 = 9\mu^2 + 17\lambda^2 - 24\lambda\mu - 30\mu + 38\lambda + 62$。

現在把題目給出的形式展開：

$$\begin{aligned}(3\mu-4\lambda-5)^2+(\lambda-1)^2+36 &= (9\mu^2+16\lambda^2+25-24\lambda\mu-30\mu+40\lambda)\\ &\quad+(\lambda^2-2\lambda+1)+36\\ &= 9\mu^2+17\lambda^2-24\lambda\mu-30\mu+38\lambda+62.\end{aligned}$$

兩者相同，所以

$$D^2=(3\mu-4\lambda-5)^2+(\lambda-1)^2+36,$$

正如所求。

想一想 為甚麼我們可以令兩個平方同時為零？

每個平方都不小於 0，所以無論 λ 和 μ 怎樣選，都有 $D^2\geq 36$。等號成立需要 $\lambda=1$ 及 $3\mu=4\lambda+5=9$，即 $\mu=3$。這兩個條件互不衝突（第一個條件確定 λ，然後第二個條件確定 μ），所以 $D^2=36$ 確實可以取到。因此兩條直線之間的最短距離是

$$D_{\min}=6,$$

並在以下兩點取到：

$$\lambda=1:\ P=(3,\,2,\,-1)\quad \text{位於}L_1,\qquad \mu=3:\ Q=(7,\,4,\,3)\quad \text{位於}L_2.$$

作為驗算，$\overrightarrow{PQ}=(4,2,4)$ 的長度是 $\sqrt{16+4+16}=6$，而且它與兩個方向向量（direction vector）都垂直（perpendicular）：$(4,2,4)\cdot(2,2,-3)=8+4-12=0$ 及 $(4,2,4)\cdot(1,2,-2)=4+4-8=0$。連接兩條直線的最短線段，正應如此。

第 (ii) 部分

L_3 上的一般點是 $P=(2,\,3+\alpha,\,5)$，L_4 上的一般點是 $Q=(3+4k\beta,\,3+(1-k)\beta,\,-2-3k\beta)$。所以

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}1+4k\beta\\(1-k)\beta-\alpha\\-7-3k\beta\end{pmatrix}$$

而

$$\begin{aligned}D^2&=(1+4k\beta)^2+((1-k)\beta-\alpha)^2+(7+3k\beta)^2\\&=((1-k)\beta-\alpha)^2+25k^2\beta^2+50k\beta+50\\&=((1-k)\beta-\alpha)^2+25(k\beta+1)^2+25,\end{aligned}$$

這是因為 $(1+4k\beta)^2+(7+3k\beta)^2=1+8k\beta+16k^2\beta^2+49+42k\beta+9k^2\beta^2$。

無論 β 是甚麼，我們都可以選 $\alpha=(1-k)\beta$ 令第一個平方為零，因為 α 沒有在其他地方出現。所以問題變成 $25(k\beta+1)^2$ 可以小到甚麼程度，而兩種情況正是在這裏分開。

想一想 當 $k=0$ 時，有甚麼不同？

若 $k\neq 0$，我們可以取 $\beta=-1/k$，令 $k\beta+1=0$。若 $k=0$，無論 β 是甚麼，$25(k\beta+1)^2$ 這一項都固定在 25。

情況 $k\neq 0$。每個平方都是非負的，所以 $D^2\geq 25$，等號在 $\beta=-1/k$、$\alpha=(1-k)\beta=(k-1)/k$ 時成立。最短距離是

$$D_{\min}=5,$$

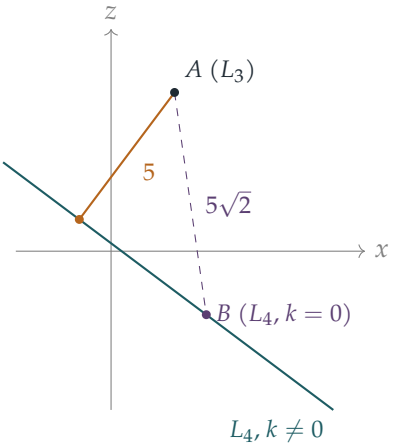
與 k 的（非零）值無關。最接近的兩點是 $P=(2,\,3+\frac{k-1}{k},\,5)$ 和 $Q=(-1,\,3+\frac{k-1}{k},\,1)$，其中 $\overrightarrow{PQ}=(-3,0,-4)$，長度為 5。由於 $D_{\min}>0$，兩條直線永不相交；而當 $k\neq 0$ 時，它們的方向 $(0,1,0)$ 與 $(4k,1-k,-3k)$ 並不平行（後者的第一和第三個分量不同時為零）。所以這兩條直線是*異面*（*skew*）直線，而 5 就是它們的公垂線（common perpendicular）的長度，這條公垂線是唯一的。

情況 $k=0$。這時 L_4 的方向是 $(0,1,0)$，與 L_3 相同：兩條直線*平行*（*parallel*）。此時 $D^2=(\beta-\alpha)^2+50$，只要 $\alpha=\beta$ 就取到最小值，所以

$$D_{\min}=\sqrt{50}=5\sqrt{2},$$

而且有無窮多對點可以取到這個值：其中一條直線上的任意一點，配上另一條直線上正對着它的那一點（y 坐標相同）。這其實就是兩條平行線之間的固定距離。

幾何意義。要看清這兩條直線，最容易的方法是沿着 y 軸直望過去，即投影（projection）到 xz 平面上。由於 L_3 與 y 軸平行，它投影成單獨一點 $A=(2,5)$，而與 L_3 垂直的距離在投影下保持不變。當 $k\neq 0$ 時，L_4 投影成通過 $(3,-2)$、方向為 $(4,-3)$ 的直線（$1-k$ 那個分量消失了），而 A 到這條直線的距離是 $|1\cdot(-3)-(-7)\cdot 4|/5=5$，與 k 無關。當 $k=0$ 時，L_4 投影成單獨一點 $B=(3,-2)$，距離是 $AB=\sqrt{1+49}=5\sqrt{2}$。



所以，當 $k \neq 0$ 時答案是 5（異面直線，只有一條最短線段，它與兩條直線都垂直）；當 $k = 0$ 時答案是 $5\sqrt{2}$（平行直線，距離處處相同）。

驗算

在第 (i) 部分，代入 $\lambda = 1$、$\mu = 3$ 所得的兩點相距 6，而且 $\overrightarrow{PQ}$ 與兩條直線都垂直。在 (λ, μ) 的網格上作數值搜尋，找不到低於 $D^2 = 36$ 的值。在第 (ii) 部分，對 $k = 0.001,\ 0.3,\ 1,\ -2,\ 5$ 以數值方法求 D^2 的最小值，每次都得到 25，而 $k = 0$ 時則得到 50。留意 $D_{\min}$ 在 $k = 0$ 處由 5 跳到 $5\sqrt{2}$。當 k 很小時，最接近的兩點位於很遠的地方，在 $\beta = -1/k$ 附近，所以極限不一定連續。

常見錯誤

- 忘記檢查兩個平方能否同時為零。這裏是可以的，但必須明確說明，不能想當然。
- 在 $k = 0$ 時除以 k：$\beta = -1/k$ 這個選擇只在 $k \neq 0$ 時可用，這正是要分兩種情況的原因。
- 把 $k \neq 0$ 時的兩條直線說成「相交」。它們不平行，但 $D_{\min} = 5 > 0$，所以它們是異面直線。

STEP 之外

多變數的配方法（completing the square）是二次型（quadratic forms）理論的起點：把 D^2 寫成平方和，就是把一個對稱矩陣（symmetric matrix）對角化（diagonalising），而求最小值則是一個最小平方法（least squares）問題。我們最後驗證的垂直關係，就是最小平方法中的「正規方程」（normal equations），而異面直線距離的一般公式 $|(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})| / |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ 也是來自同一套幾何。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）對投影和最小平方法有十分精彩的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。