詳細解答

STEP I 2007，第 6 題

純數學 • 丟番圖方程

> **STEP I 2007，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q6

關鍵思路

兩部分都由冪的差出發，而 $x-y$ 是每一個這類式子的因式。約去這個因式（因為 $d \neq 0$，所以可以這樣做）之後，餘下的是一個關於 x 和 y 的對稱式（symmetric expression）。這個式子連同 $x-y=d$，就可以確定 x 和 y。要得到整數解，我們再選取適當的 d，使公式算出來的都是整數。在第 (ii) 部分，這就是要令一個平方根成為有理數（rational number）。

解答

第 (i) 部分

把左方因式分解（factorise），

$$(x-y)(x+y)=(x-y)^3.$$

由於 $x-y=d\neq 0$，我們可以除以 $x-y$，得 $x+y=(x-y)^2=d^2$。把這式與 $x-y=d$ 相加和相減，得

$$x=\frac{d^2+d}{2}=\frac{d(d+1)}{2}, \qquad y=\frac{d^2-d}{2}=\frac{d(d-1)}{2}.$$

要找整數對，設 $x=\sqrt{m}$ 及 $y=\sqrt{n}$。那麼 $x^2-y^2=m-n$，而所要求的條件正好是 $x^2-y^2=(x-y)^3$。取 $d=\sqrt{m}-\sqrt{n}$，由於 $m>n$，它不等於零，於是

$$m=\left(\frac{d(d+1)}{2}\right)^2, \qquad n=\left(\frac{d(d-1)}{2}\right)^2.$$

若 d 是正整數，則 $d(d\pm 1)$ 是兩個連續整數之積，所以是偶數。於是 $\sqrt{m}$ 和 $\sqrt{n}$ 都是整數，m 和 n 也是整數。此外，因為 $d>0$，所以 $m>n$。我們需要 $n>100$，即

$\frac{1}{2}d(d-1) > 10$。取 $d = 5$ 得 $\frac{1}{2}d(d-1) = 10$，並不足夠，所以我們取 $d = 6$：

$$\sqrt{m} = 21, \quad \sqrt{n} = 15, \qquad m = 441, \quad n = 225.$$

驗證：$m - n = 216 = 6^3 = (21-15)^3$。（其他答案同樣成立，例如 $d = 7$ 時 $m = 784$，$n = 441$。）

第 (ii) 部分

再次因式分解：$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$。除以 $x - y = d \neq 0$，得

$$x^2 + xy + y^2 = d^3.$$

我們還有 $(x-y)^2 = d^2$，即 $x^2 - 2xy + y^2 = d^2$。從上一條方程減去這一條，得 $3xy = d^3 - d^2$，正是所要證明的結果。

現在代入 $y = x - d$：

$$3x(x-d) = d^3 - d^2 \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 - 3dx - (d^3 - d^2) = 0.$$

由二次公式（quadratic formula），

$$x = \frac{3d \pm \sqrt{9d^2 + 12(d^3 - d^2)}}{6} = \frac{3d \pm \sqrt{3d^2(4d-1)}}{6}.$$

現在 $\sqrt{3d^2(4d-1)} = |d|\sqrt{3(4d-1)}$，而 $\pm$ 已經涵蓋正負兩種情況，所以可以把 $|d|$ 換成 d。乘以 2，

$$2x = d \pm \frac{d\sqrt{3(4d-1)}}{3} = d \pm d\sqrt{\frac{4d-1}{3}},$$

這就是所要求的結果。

想一想 怎樣選取 d，才能使 x 和 y 都是整數？

若 $m = x$ 和 $n = y$ 是整數，則 $d = m - n$ 是非零整數。要使 x 是有理數，$\sqrt{(4d-1)/3}$ 必須是有理數。把它記作 k。那麼 $k^2 = (4d-1)/3$ 是整數，而整數的平方根只有在該整數是完全平方數（perfect square）時才是有理數，所以 k 是整數。因此我們需要

$$4d - 1 = 3k^2 \quad \text{對某個整數} k \geq 0.$$

左方是奇數，所以 k 是奇數。於是 $2x = d(1 \pm k)$ 是偶數，所以 x 是整數，$y = x - d$ 也是整數。

- $k = 1$ 給出 $d = 1$，於是 $x = 1$，$y = 0$ 或 $x = 0$，$y = -1$。兩組都不是由兩個正整數組成。
- $k = 3$ 給出 $d = 7$，於是 $2x = 7 \pm 21$。取正號得 $x = 14$，$y = 7$。

所以 $m = 14$，$n = 7$ 符合要求：

$$m^3 - n^3 = 2744 - 343 = 2401 = 7^4 = (m-n)^4.$$

次序是重要的：若取 $m = 7$，$n = 14$，左方是 -2401，右方卻是 $+2401$。

驗算

- 第 (i) 部分：$21^2 - 15^2 = 441 - 225 = 216$，而 $(21-15)^3 = 216$。
- 第 (ii) 部分：取 $d = 7$，$3xy = 3 \cdot 14 \cdot 7 = 294$，而 $d^3 - d^2 = 343 - 49 = 294$。
- 用電腦在 $1 \le m, n < 200$ 的範圍內搜尋，恰好找到 $(14, 7)$、$(57, 38)$ 和 $(148, 111)$。它們來自 $k = 3, 5, 7$（即 $d = 7, 19, 37$），與公式吻合。搜尋結果亦確認，在第 (i) 部分滿足 $n > 100$ 的解之中，$(441, 225)$ 是最小的。

常見錯誤

- 忘記約去因式時需要 $x - y \neq 0$。這正是題目假設 $d \neq 0$ 的原因。
- 在第 (i) 部分取 $d = 5$，得 $n = 100$，不符合嚴格不等式（strict inequality）$n > 100$。
- 不加說明就寫 $\sqrt{d^2} = d$。它其實等於 $|d|$，是因為有 $\pm$，我們才可以去掉絕對值符號。

STEP 之外

第 (ii) 部分把丟番圖方程（Diophantine equation）$m^3 - n^3 = (m-n)^4$ 完全解出：對奇數 $k \ge 3$ 取 $d = (3k^2 + 1)/4$，解就是 $m = \frac{1}{2}d(k+1)$ 和 $n = \frac{1}{2}d(k-1)$。要求一個平方根是有理數，是把這類方程化為簡單得多的條件 $4d - 1 = 3k^2$ 的標準方法。這類方程，以及它們背後二次型（quadratic form）的算術，可參閱 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（一本數論入門經典）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。