詳細解答

STEP I 2007，第 5 題

純數學 • 多面體的幾何

> **STEP I 2007，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q5

關鍵思路

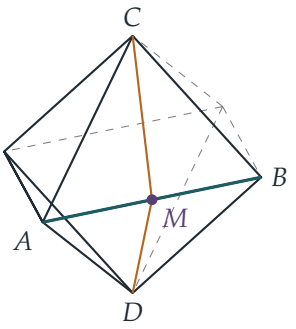
正八面體（regular octahedron）可以非常整齊地放進坐標系：它的六個頂點可取為各坐標軸正、負方向上距離原點一個單位的點。用了這個模型，兩部分都只是向量（vector）的運算。兩個面之間的夾角，是在垂直於它們公共棱的平面上量度的，所以我們取兩條直線：它們都由公共棱的中點出發，分別橫越兩個面，到達對面的頂點。至於各面的中心，只是三個頂點的平均。

解答

任何兩個正八面體都只相差一個縮放比例，而角度和體積之比在縮放之下都不會改變。因此我們不妨考慮頂點為

$$(\pm 1, 0, 0), \qquad (0, \pm 1, 0), \qquad (0, 0, \pm 1).$$

的正八面體。這些點之中，任何兩個不是相對的點都相距 $\sqrt{2}$，由此得出 12 條棱；而各個面就是每條坐標軸上各取一個頂點所成的 8 個三角形，每一種正負號的選擇對應一個面。每個面都是邊長為 $\sqrt{2}$ 的等邊三角形，所以這確實是一個正八面體。



第 (i) 部分

取兩個有公共棱的面；根據對稱性，每條棱的情況都一樣，所以只考慮其中一條便足夠。設 $A = (1,0,0)$、$B = (0,1,0)$、$C = (0,0,1)$ 及 $D = (0,0,-1)$，則面 ABC 與面 ABD 相交於 AB。設 $M = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ 為 AB 的中點。

想一想 兩個平面相交於一條直線，它們之間的夾角應怎樣量度？

我們在公共直線上取一點，然後在每個平面上，作通過該點並垂直於公共直線的直線；這兩條直線之間的夾角，就是兩個面之間的夾角。由於每個面都是等邊三角形，三角形 ABC 的中線（median）MC 垂直於 AB，三角形 ABD 的中線 MD 亦然。所以我們要求的角就是 $\angle CMD$。

現在

$$\overrightarrow{MC} = \left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},1\right), \qquad \overrightarrow{MD} = \left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-1\right),$$

而兩者都垂直於 $\overrightarrow{AB} = (-1,1,0)$，正如所料。兩個向量長度的平方都是 $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1 = \frac{3}{2}$，而

$$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD} = \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}-1 = -\tfrac{1}{2}.$$

因此

$$\cos\angle CMD = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3},$$

所以兩個面之間的夾角是 $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$，約為 109.5°，正是所求。餘弦值是負數，所以這個角是鈍角：正八面體沿棱的地方不及正方體那麼尖銳。

若不用坐標，同一個計算就是在三角形 CMD 中運用餘弦定理（cosine rule）。設棱長為 a，則中線 $MC = MD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$，而 C、D 是相對的頂點：A、C、$(-1,0,0)$、D 四點構成一個邊長為 a 的正方形，所以 $CD = \sqrt{2}\,a$。於是

$$2a^2 = \tfrac{3}{4}a^2 + \tfrac{3}{4}a^2 - 2\cdot\tfrac{3}{4}a^2\cos\angle CMD \quad\Longrightarrow\quad \cos\angle CMD = -\tfrac{1}{3}.$$

第 (ii) 部分

一個面的中心是它三個頂點的平均。每個面都有一個頂點是 $(\pm1,0,0)$，一個是 $(0,\pm1,0)$，一個是 $(0,0,\pm1)$，所以它的中心是

$$\left(\pm\tfrac{1}{3},\pm\tfrac{1}{3},\pm\tfrac{1}{3}\right),$$

八種正負號的選擇給出八個中心。這些點正好是一個邊長為 $\frac{2}{3}$ 的正方體的頂點，所以

$$V_{\text{cube}} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 = \tfrac{8}{27}.$$

正八面體是由兩個以正方形為底的棱錐（pyramid），沿着頂點為 $(\pm1,0,0),(0,\pm1,0)$ 的正方形黏合而成。這個正方形的對角線長度為 2，所以它的面積是 $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2$，而每個棱錐的高是 1。因此

$$V_{\text{oct}} = 2\times\tfrac{1}{3}\times 2\times 1 = \tfrac{4}{3}.$$

兩者之比為

$$\frac{V_{\text{oct}}}{V_{\text{cube}}} = \frac{4/3}{8/27} = \frac{9}{2},$$

所以正八面體的體積與正方體的體積之比是 $9:2$。

驗算

- $\arccos(-\frac{1}{3}) \approx 109.47^\circ$。對坐標模型的全部 12 條棱，以數值方式重複上述中點計算，每次都得出 $\cos = -\frac{1}{3}$。
- 正八面體就是 $|x|+|y|+|z|\le 1$。在 $[-1,1]^3$ 內隨機取 10^6 個點，以蒙地卡羅（Monte Carlo）方法估算它的體積，結果是 1.330，而準確值是 $\frac{4}{3}$。
- 正方體位於正八面體之內（每個中心都滿足 $|x|+|y|+|z|=1$），所以比值必定大於 1。而 $\frac{9}{2}$ 確實如此。

常見錯誤

- 取了向外法向量（outward normal）$(1,1,1)$ 與 $(1,1,-1)$ 之間的夾角，得出 $\arccos\frac{1}{3}$。兩個面本身之間的夾角是它的補角。
- 沿着不垂直於公共棱的直線量度夾角，例如沿兩條棱 CA 和 DA。在這裏那個角是 90°，但它並不是兩個面之間的夾角。
- 以為正方體的邊長就是兩個相對的面的中心之間的距離。那個距離 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 其實是正方體的一條空間對角線。

STEP 之外

正方體與正八面體是互為對偶（dual）的多面體：把其中一個的各面中心連接起來，就得到另一個，面與頂點的角色互相對調。對偶性是第一個跡象，顯示這兩個立體的對稱羣（symmetry group）是同一個羣，其階為 48；你會在羣論的入門課程中遇到它。想了解柏拉圖立體（Platonic solids）的對稱羣，可參閱 Armstrong 的 *Groups and Symmetry*（一本關於羣與對稱的入門書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。