詳細解答

STEP I 2007，第 4 題

純數學 • 二次方程的公共根

> **STEP I 2007，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q4

關鍵思路

第一部分是 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 的經典因式分解（factorisation）：一旦知道 $x+b+c$ 是因式，比較係數便可得出那個二次式。第二部分有兩個二次方程共用一個根。標準的做法是*消去*（eliminate）：把兩條方程組合起來，使 k 的其中一個冪消去。用兩種不同的方法這樣做，便可把 k 和 k^2 寫成比的形式，然後由 $k^2=(k)^2$ 得出一個只涉及係數的關係式。這個關係式原來就是第一部分取 $x=a$ 的情況。

解答

因式分解

把 $x=-(b+c)$ 代入 $P(x)=x^3-3xbc+b^3+c^3$：

$$\begin{aligned}P(-b-c)&=-(b+c)^3+3bc(b+c)+b^3+c^3\\&=-(b^3+3b^2c+3bc^2+c^3)+3b^2c+3bc^2+b^3+c^3=0,\end{aligned}$$

所以根據因式定理（factor theorem），$x+b+c$ 是因式。比較係數（P 的 x^2 項為零，常數項為 b^3+c^3）可得

$$x^3-3xbc+b^3+c^3=(x+b+c)\,\mathrm{Q}(x),\qquad \mathrm{Q}(x)=x^2+b^2+c^2-xb-bc-cx.$$

把右邊展開即可確認：x^2 項是 $x^2(b+c)-x^2(b+c)=0$，x 項合併後是 $-3bcx$，而常數項是 b^3+c^3。

至於平方和，x^2、b^2、c^2 各在 $2\mathrm{Q}(x)$ 中出現兩次，而每個交叉項則以 $-2xb$ 等形式出現，所以

$$2\mathrm{Q}(x)=(x-b)^2+(b-c)^2+(c-x)^2.$$

公共根

由於 k 是兩條方程的根，

$$ak^2 + bk + c = 0, \tag{1}$$
$$bk^2 + ck + a = 0. \tag{2}$$

要消去 k^2，取 $b \times (1) - a \times (2)$：

$$(b^2 - ac)k + bc - a^2 = 0, \qquad \text{所以} \qquad (ac - b^2)\,k = bc - a^2.$$

若改為消去 k 項，則取 $c \times (1) - b \times (2)$：

$$(ac - b^2)k^2 + c^2 - ab = 0, \qquad \text{所以} \qquad (ac - b^2)\,k^2 = ab - c^2.$$

這就是涉及 k^2 的類似式子。

現在利用 $k^2 = k \cdot k$。由於 $ac \neq b^2$，我們可以除以 $ac - b^2$，得 $k = \dfrac{bc - a^2}{ac - b^2}$，於是

$$(ac - b^2)\,\frac{(bc - a^2)^2}{(ac - b^2)^2} = ab - c^2 \quad \Longrightarrow \quad (ac - b^2)(ab - c^2) = (bc - a^2)^2,$$

其中最後一步是把全式乘以 $ac - b^2$。這就是所求的結果。

把兩邊展開，

$$a^2bc - ac^3 - ab^3 + b^2c^2 = b^2c^2 - 2a^2bc + a^4,$$
$$\text{所以} \quad 0 = a^4 + ab^3 + ac^3 - 3a^2bc = a\left(a^3 - 3abc + b^3 + c^3\right).$$

由於 $a \neq 0$，我們得到 $a^3 - 3abc + b^3 + c^3 = 0$，正如所求。

想一想 我們在哪裏見過 $a^3 - 3abc + b^3 + c^3$？

它就是第一部分取 $x = a$ 的情況。所以

$$(a + b + c)\,\mathrm{Q}(a) = 0, \qquad 2\mathrm{Q}(a) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2.$$

因此，要麼 $a + b + c = 0$，要麼 $\mathrm{Q}(a) = 0$。

情況 $\mathrm{Q}(a) = 0$。因為 a、b、c 是實數，三個平方都是非負的，而它們的和為零，只可能是每一個都為零。所以 $a = b = c$，兩條方程都是 $a(y^2 + y + 1) = 0$：它們完全相同。

情況 $a + b + c = 0$。把 $c = -a - b$ 代入 k 的公式：

$$bc - a^2 = -ab - b^2 - a^2, \qquad ac - b^2 = -a^2 - ab - b^2,$$

所以 $bc - a^2 = ac - b^2$，而由於這個值不為零，$k = 1$。（事實上 $y = 1$ 滿足兩條方程，因為這時兩條方程都變成 $a + b + c = 0$。）

所以要麼 $k = 1$，要麼兩條方程完全相同，全題至此完成。

留意在方程相同的情況下，$a = b = c$ 會得出 $ac = b^2$，而這已被題目的假設排除。所以在題設條件下，公共根其實必定是 $k = 1$；「相同」這個可能性，是把條件 $ac \neq b^2$ 拿走之後才會出現的，這時公共根是複數的單位立方根（cube roots of unity）。

驗算

取 $a = 1$、$b = 2$、$c = -3$，則 $a + b + c = 0$。兩條方程是 $y^2 + 2y - 3 = (y - 1)(y + 3) = 0$ 和 $2y^2 - 3y + 1 = (2y - 1)(y - 1) = 0$，它們共用 $k = 1$。這裏 $ac - b^2 = -7$、$bc - a^2 = -7$ 及 $ab - c^2 = -7$，所以 $(ac - b^2)k = bc - a^2$、$(ac - b^2)k^2 = ab - c^2$ 和 $(-7)(-7) = (-7)^2$ 全部成立，而且 $a^3 - 3abc + b^3 + c^3 = 1 + 18 + 8 - 27 = 0$。我們亦以精確算術，用一千組隨機的三元數組檢驗過第一部分的兩個恆等式，以及展開式 $(ac - b^2)(ab - c^2) - (bc - a^2)^2 = -a(a^3 - 3abc + b^3 + c^3)$。

常見錯誤

- 消去常數項（$a \times (1) - c \times (2)$）會得出 $k\big((a^2 - bc)k + ab - c^2\big) = 0$，還需要 $k \neq 0$ 才用得上。$c \times (1) - b \times (2)$ 這個組合則可避免這個問題。
- 除以 $ac - b^2$ 時，沒有說明題目已保證它不為零。
- 由 $\mathrm{Q}(a) = 0$ 推出 $a = b = c$ 時，沒有用到 a、b、c 是實數：平方和的論證對複數並不成立。

STEP 之外

兩個多項式有公共根的條件，一般由結式（resultant）給出，那是一個由它們的係數構成的行列式（determinant）；關係式 $(ac - b^2)(ab - c^2) = (bc - a^2)^2$ 正正就是令這兩個二次式的結式等於零。$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 這個式子也是一個循環矩陣（circulant matrix）的行列式，而且它可以完全分解為 $(a + b + c)(a + \omega b + \omega^2 c)(a + \omega^2 b + \omega c)$，其中 ω 是一個複數的單位立方根。想進一步了解多項式及其根，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。