詳細解答

STEP I 2007，第 3 題

純數學 • 三角函數積分

> **STEP I 2007，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q3

關鍵思路

$\cos^4\theta$ 和 $\sin^4\theta$ 單獨來看都不易積分，但只要利用 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 把兩者的差與和化為 2θ 的函數，這兩個式子就都容易積分（integrate）了。把和與差分別積分，便得到關於所求兩個積分的兩條簡單線性方程。同樣的技巧再升一級，就能處理六次方的情況。

解答

恆等式

把平方差（difference of two squares）因式分解，

$$\cos^4\theta-\sin^4\theta=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\cos 2\theta\cdot 1=\cos 2\theta.$$

至於兩者之和，我們用配方法（completing the square）：

$$\begin{aligned}\cos^4\theta+\sin^4\theta&=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta\\&=1-\tfrac{1}{2}(2\sin\theta\cos\theta)^2\\&=1-\tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta,\end{aligned}$$

其中用到 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$。兩個恆等式（identity）均已得證。

四次方

記 $C_4=\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta$ 及 $S_4=\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta$。把第一個恆等式積分，

$$C_4-S_4=\int_0^{\pi/2}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta=\left[\tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}=0.$$

對於第二個恆等式，我們需要 $\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta \,\mathrm{d}\theta$。利用 $\sin^2 2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 4\theta)$，

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta \,\mathrm{d}\theta = \left[\tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4},$$

因為 $\sin 2\pi = 0$。因此

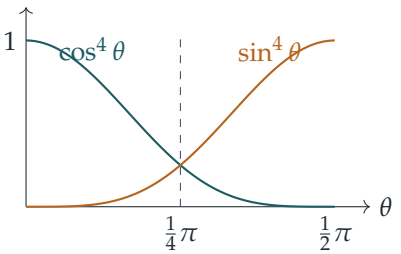
$$C_4 + S_4 = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}.$$

把兩條方程相加和相減，

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta \,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{16}.$$

想一想 我們能否不經任何計算就看出 $C_4 = S_4$？

可以。代換（substitution）$\phi = \frac{1}{2}\pi - \theta$ 把 $\cos\theta$ 變成 $\sin\phi$，並把上下限 0 和 $\frac{1}{2}\pi$ 對調，所以對任何 n 都有 $\int_0^{\pi/2} \cos^n\theta \,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^n\phi \,\mathrm{d}\phi$。$\cos^4\theta$ 與 $\sin^4\theta$ 的圖像關於直線 $\theta = \frac{1}{4}\pi$ 互為鏡像，因此兩者所圍的面積相等：



所以第一個恆等式其實只是為了求和才用得上；差的積分等於 0，不過是這種對稱性（symmetry）的另一種面貌。

六次方

我們重複同一方法。設 $c = \cos\theta$、$s = \sin\theta$，並有 $c^2 + s^2 = 1$：

$$\begin{aligned} c^6 - s^6 &= (c^2 - s^2)(c^4 + c^2 s^2 + s^4) = \cos 2\theta\left(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta + \tfrac{1}{4}\sin^2 2\theta\right) \\ &= \cos 2\theta\left(1 - \tfrac{1}{4}\sin^2 2\theta\right), \end{aligned}$$

其中用到已證明的恆等式以及 $c^2 s^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta$。至於兩者之和，我們利用 $c^2 + s^2$ 的立方：

$$c^6 + s^6 = (c^2 + s^2)^3 - 3c^2 s^2 (c^2 + s^2) = 1 - \tfrac{3}{4}\sin^2 2\theta.$$

以 C_6 和 S_6 表示這兩個積分。由於 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin^3 2\theta = 6\sin^2 2\theta\cos 2\theta$，

$$C_6 - S_6 = \left[\tfrac{1}{2}\sin 2\theta - \tfrac{1}{24}\sin^3 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 0,$$

這與對稱性論證所預料的結果一致。再次利用 $\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\pi$，

$$C_6 + S_6 = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{16}.$$

因此

$$\int_0^{\pi/2} \cos^6\theta \,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^6\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{5\pi}{32}.$$

驗算

- 冪次愈高，答案愈小：$n=0$ 時為 $\frac{1}{2}\pi$，$n=2$ 時為 $\frac{1}{4}\pi$，然後是 $\frac{3}{16}\pi$ 和 $\frac{5}{32}\pi$。這是必然的，因為在該區間上 $0 \le \cos\theta \le 1$。
- 數值上，用辛普森法則（Simpson's rule）可得 $\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta \,\mathrm{d}\theta \approx 0.589049$ 及 $\int_0^{\pi/2} \cos^6\theta \,\mathrm{d}\theta \approx 0.490874$，與 $3\pi/16$ 和 $5\pi/32$ 吻合；正弦的積分在同樣的準確度下亦與這些數值一致。
- 把 $\theta = \frac{1}{4}\pi$ 代入兩個關於和的恆等式，得 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2}$ 及 $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 - \frac{3}{4}$，兩者皆成立。

常見錯誤

- 仿照 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ 而寫出 $\cos^4\theta + \sin^4\theta = 1$：這樣就漏掉了交叉項 $2\sin^2\theta\cos^2\theta$。
- 對 $\cos 2\theta$ 或 $\cos 4\theta$ 積分時，忘記由鏈式法則（chain rule）而來的因子 $\frac{1}{2}$；在本題中，這對 $\cos 2\theta$ 沒有影響（反正積分是 0），但對 $\sin^2 2\theta$ 就有影響。

STEP 之外

這些都是沃利斯（Wallis）積分 $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n\theta \,\mathrm{d}\theta$ 的特例，它們滿足遞推公式（reduction formula）$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$（用分部積分法（integration by parts）即可得到）。你可以驗證 $I_4 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$ 和 $I_6 = \frac{5}{6} I_4$ 正好給出上面的答案。比較 I_{2n} 與 I_{2n+1}，便可推導出沃利斯著名的 π 的無窮乘積（infinite product）。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 有更多 STEP 風格的遞推公式練習，而 Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis* 則把當中的極限論證嚴格化。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。