詳細解答

STEP I 2007，第 2 題

純數學 • 反正切恆等式

> **STEP I 2007，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q2

關鍵思路

只要對等式兩邊取正切，再運用 $\tan(A+B)$ 的加法公式（addition formula），一條關於反正切（inverse tangent）的等式就會變成一條關於普通分數的等式。代價是 tan 每隔 π 便重複一次，所以 $\tan(A+B)=1$ 只告訴我們 $A+B=\frac{1}{4}\pi+k\pi$；我們還需要交代一下各個角的大小，才能確定 k。在此之後，每一部分都是一小段數論（number theory）：作因式分解（factorise），或者運用整除性（divisibility）論證。

解答

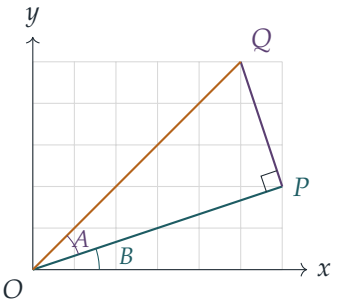
第 (i) 部分

由於 $\tan A=\frac{1}{2}$ 及 $\tan B=\frac{1}{3}$，

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1.$$

現在 A 和 B 都是銳角（acute），所以 $0<A+B<\pi$，而在 $(0,\pi)$ 內正切為 1 的角只有 $\frac{1}{4}\pi$。因此 $A+B=\frac{1}{4}\pi$，正如所求。

下圖在方格紙上展示同一事實。取 $O=(0,0)$、$P=(6,2)$ 及 $Q=(5,5)$，直線 OP 與 x 軸的夾角為 $\arctan\frac{1}{3}$；$PQ=(-1,3)$ 垂直於 $OP=(6,2)$，而且長度是它的一半，所以角 POQ 是 $\arctan\frac{1}{2}$；而 Q 位於直線 $y=x$ 上，即在 $\frac{1}{4}\pi$ 的方向。



第 (i) 部分：整數 p 和 q

首先排除 $pq = 1$ 的情況，因為這時加法公式會出現除以零。此時 $p = q = 1$ 或 $p = q = -1$，左邊分別是 $\frac{1}{2}\pi$ 和 $-\frac{1}{2}\pi$，兩者都不是 $\frac{1}{4}\pi$。所以 $pq \neq 1$，對題目所給等式的兩邊取正切，得

$$\frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}{1 - \frac{1}{pq}} = 1.$$

分子和分母同乘以 pq，得 $\dfrac{p+q}{pq-1} = 1$，所以

$$p + q = pq - 1 \quad \Longrightarrow \quad pq - p - q + 1 = 2 \quad \Longrightarrow \quad (p-1)(q-1) = 2,$$

這就是所要求的結果。

由於 $p-1$ 和 $q-1$ 是乘積為 2 的整數，數對 $(p-1, q-1)$ 必為以下其中之一：

$$(1,2), \quad (2,1), \quad (-1,-2), \quad (-2,-1),$$

由此得 $(p,q) = (2,3)$、$(3,2)$、$(0,-1)$ 或 $(-1,0)$。最後兩個要捨去，因為 p 和 q 都不是零。所以 $\{p,q\} = \{2,3\}$，而根據第 (i) 部分的前半，兩種次序確實都滿足該等式。

? **想一想** 我們只證明了解必須滿足 $(p-1)(q-1) = 2$。為甚麼事後還要檢查這些候選答案？

取正切會失去資訊：$(p-1)(q-1) = 2$ 等價於 $\tan(\arctan\frac{1}{p} + \arctan\frac{1}{q}) = 1$，而後者也容許和為 $-\frac{3}{4}\pi$ 之類的值。這裏的候選數對要麼含有 0（於是 $\frac{1}{p}$ 沒有意義），要麼是 2 和 3，而我們已知這一對是成立的。

第 (ii) 部分

設 $\theta = \arctan\frac{1}{r}$ 及 $\phi = \arctan\dfrac{s}{s+t}$。對題目所給的等式取正切，

$$\frac{\frac{1}{r} + \frac{s}{s+t}}{1 - \frac{s}{r(s+t)}} = 1.$$

分母不為零：由於 $r \geq 1$ 及 $t \geq 1$，我們有 $r(s+t) > s$。分子和分母同乘以 $r(s+t)$，

$$\frac{(s+t)+rs}{r(s+t)-s} = 1 \quad \Longrightarrow \quad s+t+rs = rs+rt-s \quad \Longrightarrow \quad t(r-1) = 2s.$$

想一想 關於 s 和 t 的最大公因數（highest common factor）的條件，在哪裏派上用場？

等式 $t(r-1) = 2s$ 表示 t 整除 $2s$。由於 $\text{hcf}(s,t) = 1$，t 與 s 沒有公共的質因數（prime factor），所以 t 的每個質因數都必須來自那個 2：即 t 整除 2。由於 t 是正整數，可能的值只有

$$t = 1 \quad \text{或} \quad t = 2.$$

- 若 $t = 1$：$r - 1 = 2s$，所以 $r = 2s + 1$。
- 若 $t = 2$：$2(r-1) = 2s$，所以 $r = s + 1$。（這裏 s 必須是奇數，因為 $\text{hcf}(s,2) = 1$。）

兩種情況都確實會出現。事實上 $0 < \frac{1}{r} \leq 1$ 及 $0 < \frac{s}{s+t} < 1$，所以 θ 和 ϕ 都落在 $(0, \frac{1}{4}\pi]$ 內，並且 $0 < \theta + \phi < \frac{1}{2}\pi$。把上面的代數運算倒推回去，$t(r-1) = 2s$ 給出 $\tan(\theta+\phi) = 1$，於是 $\theta + \phi = \frac{1}{4}\pi$ 準確成立。例如，$t = 1$, $s = 1$ 給出 $\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{2}$，而 $t = 2$, $s = 1$ 給出 $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$：正是第 (i) 部分的恆等式，兩種次序各出現一次。

驗算

- 用計算機計算，$\arctan 0.5 + \arctan(1/3) = 0.4636 + 0.3218 = 0.7854 = \frac{1}{4}\pi$。
- 用電腦搜尋所有滿足 $|p|, |q| \leq 200$ 的非零 p, q，只找到 $(2,3)$ 和 $(3,2)$。
- 在 $r < 400$ 及 $s, t < 150$ 且 $\text{hcf}(s,t) = 1$ 的範圍內搜尋，只找到 $t = 1$, $r = 2s+1$ 和 $t = 2$, $r = s+1$；例如 $\arctan\frac{1}{8} + \arctan\frac{7}{9} = \frac{1}{4}\pi$（$s = 7$, $t = 2$），在機器精度內成立。

常見錯誤

- 由 $\tan(A+B) = 1$ 直接推斷 $A + B = \frac{1}{4}\pi$，卻沒有說明為何 $A + B$ 不可能是 $\frac{5}{4}\pi$。
- 忘記了 2 的負因數分解 $(-1)(-2)$ 和 $(-2)(-1)$，或者忘記因為它們會給出零而要把它們捨去。
- 寫「t 整除 $2s$，所以 t 整除 2」而沒有引用 $\text{hcf}(s,t) = 1$：這正是需要用到該假設的地方。

STEP 之外

tan 的加法公式其實就是複數（complex numbers）的乘法：$\arctan\frac{1}{p}$ 是 $p+\mathrm{i}$ 的輻角（argument），所以第 (i) 部分所說的，就是 $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i}) = 5+5\mathrm{i}$ 的輻角為 $\frac{1}{4}\pi$。像梅欽（Machin）公式 $4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{1}{4}\pi$ 這類恆等式，曾被用來把 π 計算到數百位，它們正是以完全相同的方式，由高斯整數（Gaussian integers）的因數分解得來。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 把複數乘法的幾何闡述得十分精彩，而 Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 則涵蓋了第 (ii) 部分所用的整除性論證。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。