詳細解答

STEP I 2007，第 14 題

概率與統計 • 泊松參數的唯一性

STEP I 2007，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/07-s1-q14

關鍵思路

每一項資料都給出一條形如 $h(\lambda) =$ 常數 的方程，其中 h 是平均值（mean）的某個函數。這條方程能否唯一地確定 λ，完全取決於 h 在 $\lambda > 0$ 上的形狀：嚴格單調（strictly monotonic）的 h 取每個值最多一次，而先升後降的 h 則會取大部分的值兩次，只有最大值才取一次。因此，整道題的重點就是找出每個函數在哪裏單調、在哪裏達到頂點。

解答

全題中，$\lambda > 0$（泊松分佈（Poisson distribution）的平均值必為正數），而且 $\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k/k!$，其中 $k = 0, 1, 2, \ldots$

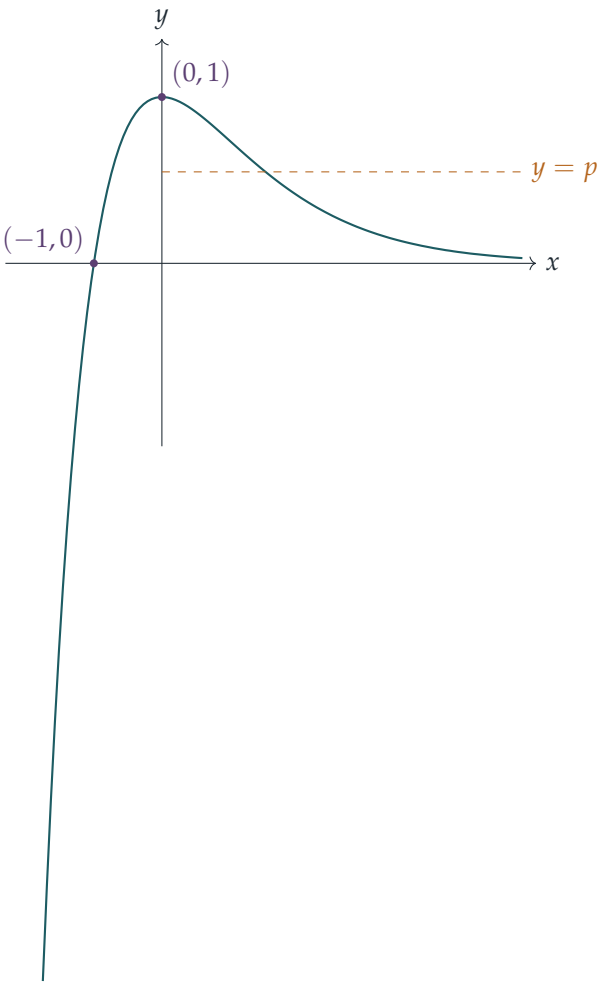
第 (i) 部分

設 $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$。由乘積法則（product rule），

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+1)\mathrm{e}^{-x} = -x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

由於 $\mathrm{e}^{-x} > 0$，$f'(x)$ 的正負號與 x 相反：f 在 $x < 0$ 時遞增，在 $x > 0$ 時遞減。所以唯一的轉向點（turning point）是位於 $(0, 1)$ 的極大點，這也正是曲線與 y 軸相交之處。曲線與 x 軸相交於 $x + 1 = 0$ 之處，即 $(-1, 0)$。

至於兩端的情況：當 $x \to \infty$ 時，e^{-x} 壓倒線性因子，$f(x) \to 0$，並且是從上方趨近（x 軸是一條漸近線（asymptote））；當 $x \to -\infty$ 時，兩個因子的大小都不斷增長，$f(x) \to -\infty$。



現在考慮概率。我們有

$$\mathrm{P}(X \geq 2) = 1 - \mathrm{P}(X = 0) - \mathrm{P}(X = 1) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} - \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} = 1 - f(\lambda),$$

所以題目所給的資料恰好等於說

$$f(\lambda) = (1 + \lambda)\mathrm{e}^{-\lambda} = p.$$

在 $\lambda > 0$ 上，函數 f 連續（continuous）而且嚴格遞減（因為 $f'(\lambda) = -\lambda \mathrm{e}^{-\lambda} < 0$），由 $f(0) = 1$ 開始下降，當 $\lambda \to \infty$ 時趨向 0。所以它取 $(0, 1)$ 內的每個值恰好一次：由中間值定理（intermediate value theorem）可知最少有一個解，而嚴格單調性則排除了第二個解。在略圖中，當 $0 < p < 1$ 時，水平線 $y = p$ 與右邊的分支恰好相交一次。因此 λ 被唯一確定。

第 (ii) 部分

這裏 $\mathrm{P}(X=1)=\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}=q$。記 $g(\lambda)=\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}$，則

$$g'(\lambda)=(1-\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda},$$

所以 g 在 $(0,1]$ 上嚴格遞增，在 $[1,\infty)$ 上嚴格遞減，最大值為 $g(1)=\mathrm{e}^{-1}$。此外，當 $\lambda\to 0^+$ 及當 $\lambda\to\infty$ 時，都有 $g(\lambda)\to 0$。（事實上 $g(\lambda)=\mathrm{e}^{-1}f(\lambda-1)$，所以 g 的圖像就是第 (i) 部分的曲線向右平移一個單位，再沿垂直方向按 e^{-1} 的比例縮放。）

想一想 一條水平線與一條先升至頂點、然後下降的曲線，可以相交多少次？

每一段單調的部分最多被擊中一次，所以：

- 若 $0<q<\mathrm{e}^{-1}$，則在 $(0,1)$ 內有一個解，在 $(1,\infty)$ 內有另一個解，所以 λ 有兩個可能的值；
- 若 $q>\mathrm{e}^{-1}$，則沒有解；
- 若 $q=\mathrm{e}^{-1}$，則唯一的解就是頂點本身，即 $\lambda=1$。

所以這項資料只對恰好一個 q 值確定唯一的 λ，即

$$q=\mathrm{e}^{-1},\qquad \lambda=1.$$

第 (iii) 部分

根據條件概率（conditional probability）的定義，並且由於事件 $\{X=1\}$ 包含於 $\{X\le 2\}$ 之內，

$$\mathrm{P}(X=1\mid X\le 2)=\frac{\mathrm{P}(X=1)}{\mathrm{P}(X\le 2)}=\frac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}}{\mathrm{e}^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{1}{2}\lambda^2\right)}=\frac{2\lambda}{2+2\lambda+\lambda^2}.$$

把它記作 $k(\lambda)$。將分子和分母同時除以 λ（由於 $\lambda>0$，這是容許的），

$$k(\lambda)=\frac{2}{\lambda+\dfrac{2}{\lambda}+2}.$$

想一想 當 $\lambda>0$ 時，$\lambda+2/\lambda$ 的最小值是多少？

由算術平均—幾何平均不等式（AM–GM inequality），$\lambda+\dfrac{2}{\lambda}\ge 2\sqrt{\lambda\cdot\dfrac{2}{\lambda}}=2\sqrt{2}$，等號成立當且僅當 $\lambda=2/\lambda$，即 $\lambda=\sqrt{2}$。再者，$\lambda+2/\lambda$ 在 $(0,\sqrt{2}]$ 上嚴格遞減，在 $[\sqrt{2},\infty)$ 上嚴格遞增（它的導數 $1-2/\lambda^2$ 只在 $\sqrt{2}$ 處變號），而且在兩端都趨向 ∞。所以 k 與第 (ii) 部分的 g 一樣，具有先升後降的形狀，其最大值為

$$k(\sqrt{2})=\frac{2}{2\sqrt{2}+2}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1.$$

與之前完全一樣：當 $0 < r < \sqrt{2} - 1$ 時，λ 有兩個值；當 $r > \sqrt{2} - 1$ 時，沒有任何值；當 $r = \sqrt{2} - 1$ 時，恰好有一個值。所以 λ 只在以下情況被唯一確定：

$$r = \sqrt{2} - 1, \qquad \lambda = \sqrt{2}.$$

另一方法：在 $k(\lambda) = r$ 中消去分母，得到二次方程 $r\lambda^2 - 2(1-r)\lambda + 2r = 0$。它的兩根之積為 $2 > 0$，兩根之和為 $2(1-r)/r > 0$，所以若有實根，兩根必定都是正數；方程恰好有一個根，當且僅當判別式（discriminant）$4\left[(1-r)^2 - 2r^2\right] = 4(1 - 2r - r^2)$ 等於零，由此得 $r = \sqrt{2} - 1$（取正根），以及重根 $\lambda = (1-r)/r = \sqrt{2}$。

驗算

- 第 (ii) 部分：$\lambda = 1$ 給出 $\mathrm{P}(X = 1) = \mathrm{e}^{-1} \approx 0.3679$；以數值方法在 $0 < \lambda < 40$ 的範圍內掃描 $\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}$，其值從不超過這個數，而 $q = 0.3$ 則給出兩個交點。
- 第 (iii) 部分：取 $\lambda = \sqrt{2}$，則 $\dfrac{2\sqrt{2}}{2 + 2\sqrt{2} + 2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \approx 0.4142$，數值掃描亦確認這就是最大值；$r = 0.35$ 給出 λ 的兩個值，$r = 0.45$ 則沒有任何值。
- 合理性檢查：當 $\lambda \to 0$ 時，幾乎全部概率質量都集中在 0；當 $\lambda \to \infty$ 時，在已知 $X \le 2$ 的條件下，概率質量堆積在 2。所以在這兩個極限情況下都有 $\mathrm{P}(X = 1 \mid X \le 2) \to 0$，與公式所示一致。

常見錯誤

- 忘記 $\lambda > 0$：在第 (i) 部分，曲線在 $x < 0$ 時同樣存在，但只有 $x > 0$ 的分支才與概率有關。
- 在第 (i) 部分聲稱解是唯一的，卻沒有說明原因：你既要說明解存在（連續性，以及函數值由 1 一直下降至 0），也要說明沒有第二個解（嚴格單調性）。
- 在第 (iii) 部分使用 $\mathrm{P}(X = 1 \text{ 及 } X \le 2) = \mathrm{P}(X = 1)\,\mathrm{P}(X \le 2)$；這兩個事件並非獨立（independent），而是 $\{X = 1\}$ 包含於 $\{X \le 2\}$ 之內。

STEP 之外

這是初嘗可識別性（identifiability）的滋味：在統計學中，我們會問一個觀察得到的量能否確定模型的參數，而答案是肯定的，當且僅當由參數到可觀察量的映射是一對一（one-to-one）的。在這裏，$\mathrm{P}(X \ge 2)$ 能識別 λ，但 $\mathrm{P}(X = 1)$ 和 $\mathrm{P}(X = 1 \mid X \le 2)$ 一般都不能。當你要求似然（likelihood）的最大值時，同樣的先升後降形狀會再次出現：$\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}$

就是在看到單一觀察值 $X = 1$ 之後 λ 的似然，而它在 $\lambda = 1$ 處的頂點就是最大似然估計（maximum likelihood estimate）。Blitzstein 與 Hwang 合著的 *Introduction to Probability*（概率論入門）寫得生動活潑，是進一步了解泊松分佈和條件概率的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。