詳細解答

STEP I 2007，第 11 題

力學 • 拋體運動

STEP I 2007，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

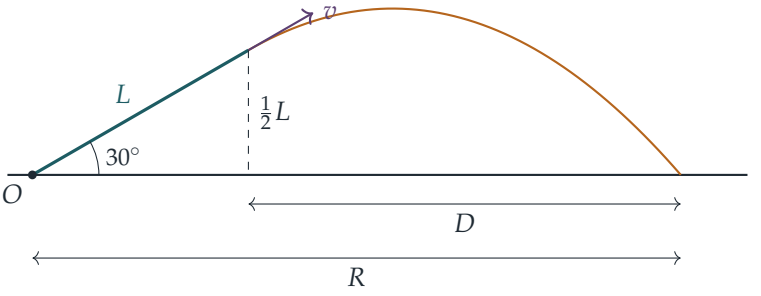
step.maths.org/questions/07-s1-q11

關鍵思路

把運動分成兩個階段。在光滑（smooth）管內，沿管方向唯一的力就是重力的分量，所以用能量（energy）（或等加速度公式（constant-acceleration formulae））便可求出離管時的速率。之後它就是一個普通的拋體（projectile），從高於終點水平 $\frac{1}{2}L$ 的一點以 30° 射出。消去飛行時間便得到關於 D 的二次方程；對它作隱函數微分，就可求得 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}L$，完全不必解出 D。

解答

我們把粒子（particle）看成質點（point mass），把管看成光滑的（因此法向反作用力（normal reaction）不作功，沿管方向亦沒有分量），並忽略空氣阻力（air resistance）。



在管內

沿管方向分解力，唯一的分量是沿斜面向下的 $mg\sin 30^\circ = \frac{1}{2}mg$，所以減速度（deceleration）為 $\frac{1}{2}g$。經過距離 L 後，

$$v^2 = u^2 - 2\cdot\tfrac{1}{2}g\cdot L = u^2 - gL,$$

其中 v 是離管時的速率。（粒子要能離開管，必須有 $u^2 > gL$。）管的頂端比下端高 $L\sin 30^\circ = \frac{1}{2}L$，與下端的水平距離為 $L\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}L$。

拋體階段

粒子沿管的方向離開，所以它的速度的水平分量為 $\frac{\sqrt{3}}{2}v$，垂直分量為向上的 $\frac{1}{2}v$。以離管點為原點量度，經過時間 t 後

$$x = \tfrac{\sqrt{3}}{2}vt, \qquad y = \tfrac{1}{2}vt - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

當 $y = -\frac{1}{2}L$ 時，粒子回到下端的水平，此刻 $x = D$。由第一式得 $t = \dfrac{2D}{\sqrt{3}\,v}$，代入第二式，

$$\frac{D}{\sqrt{3}} - \frac{2gD^2}{3v^2} = -\frac{L}{2}.$$

全式乘以 $-6v^2$，

$$4gD^2 - 2\sqrt{3}\,v^2D - 3Lv^2 = 0,$$

再代入 $v^2 = u^2 - gL$，

$$4gD^2 - 2\sqrt{3}\,(u^2 - gL)D - 3L(u^2 - gL) = 0,$$

這就是所求的方程。（它的兩個根之中，D 是正的那一個：兩根之積為 $-3Lv^2/(4g) < 0$。）

導數

當 u 固定時，D 取決於 L，所以我們把方程對 L 求導，凡同時含有兩者的項都用積法則（product rule）：

$$8gD\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L} - 2\sqrt{3}(u^2 - gL)\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L} + 2\sqrt{3}\,gD - 3(u^2 - gL) + 3gL = 0.$$

最後兩項合併為 $-3(u^2 - 2gL)$。把含 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}L$ 的項集中起來，

$$\big(8gD - 2\sqrt{3}(u^2 - gL)\big)\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L} = -\big(2\sqrt{3}\,gD - 3(u^2 - 2gL)\big),$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L} = -\frac{2\sqrt{3}\,gD - 3(u^2 - 2gL)}{8gD - 2\sqrt{3}(u^2 - gL)},$$

正如所求。

想一想 為甚麼 $-3L(u^2-gL)$ 這一項會產生兩部分？

因為 L 在其中出現了兩次：把 $-3Lu^2+3gL^2$ 求導得 $-3u^2+6gL$，即 $-3(u^2-gL)+3gL$。忘記括號內的 L，是漏掉答案中 $2gL$ 的最常見原因。

R 的駐值（stationary value）

粒子最終相對於下端的水平位移，等於管的水平跨度加上 D：

$$R=\tfrac{\sqrt3}{2}L+D,\qquad \text{所以}\qquad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}L}=\frac{\sqrt3}{2}+\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L}.$$

因此 $\mathrm{d}R/\mathrm{d}L=0$ 當且僅當 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}L=-\frac{\sqrt3}{2}$，即（兩邊乘以分母，下文會驗證分母不為零）

$$2\sqrt3\,gD-3(u^2-2gL)=\tfrac{\sqrt3}{2}\big(8gD-2\sqrt3(u^2-gL)\big)=4\sqrt3\,gD-3(u^2-gL).$$

兩邊的 $3u^2$ 項互相抵消，餘下 $6gL-2\sqrt3\,gD=3gL$，所以 $2\sqrt3\,gD=3gL$，即

$$2D=L\sqrt3.$$

每一步都是可逆的，所以當 $2D=L\sqrt3$ 時 $\mathrm{d}R/\mathrm{d}L=0$，正如所求。

要求出 R，把 $D=\frac{\sqrt3}{2}L$ 代入二次方程：

$$4g\cdot\tfrac34L^2-2\sqrt3(u^2-gL)\cdot\tfrac{\sqrt3}{2}L-3L(u^2-gL)=3gL^2-6L(u^2-gL)=0.$$

由於 $L>0$，由此得 $gL=2(u^2-gL)$，所以 $L=\dfrac{2u^2}{3g}$。（這時 $v^2=u^2-gL=\frac13u^2>0$，所以粒子確實會離開管，而分母 $8gD-2\sqrt3v^2=\frac{8\sqrt3}{3}u^2-\frac{2\sqrt3}{3}u^2=2\sqrt3\,u^2$ 不為零。）最後

$$R=\tfrac{\sqrt3}{2}L+D=\sqrt3\,L=\frac{2\sqrt3\,u^2}{3g}=\frac{2u^2}{\sqrt3\,g}.$$

驗算

- 當 $L=0$ 時，二次方程給出 $D=\sqrt3u^2/(2g)$，正是以 30° 發射時大家熟悉的射程（range）$u^2\sin60^\circ/g$。
- 當 $L=u^2/g$ 時，粒子剛好到達頂端而 $v=0$，所以 $D=0$，同樣有 $R=\frac{\sqrt3}{2}u^2/g$。駐值 $2u^2/(\sqrt3g)\approx1.155\,u^2/g$ 出現在這兩個情況之間，而且比兩者都大，所以它是極大值。
- 數值上，取 $u=g=1$，讓 L 掃過 $[0,1]$，所得的最大 R 為 1.1547，出現於 $L\approx0.6667$，與 $2/\sqrt3$ 及 $L=\frac23$ 吻合；直接逐步模擬運動，亦能重現關於 D 的二次方程。

常見錯誤

- 把管內的減速度當作 g，而不是 $g\sin 30^\circ = \frac{1}{2}g$。
- 令 $y = 0$ 而不是 $y = -\frac{1}{2}L$：粒子的落點低於它的發射點。
- 寫成 $R = D$，忘記了管本身的水平長度 $\frac{\sqrt{3}}{2}L$。

STEP 之外

不解方程 $F(D, L) = 0$ 而直接對它求導，就是隱函數微分法（implicit differentiation）；到了大學一年級的分析課，它會發展成隱函數定理（implicit function theorem）：$\mathrm{d}D/\mathrm{d}L = -F_L/F_D$，凡 $F_D \neq 0$ 之處皆成立，而這正是我們驗證過的那個分母。力學方面，Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）是很好的下一步。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。