詳細解答

STEP I 2007，第 10 題

力學 • 位移–時間圖

> **STEP I 2007，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q10

關鍵思路

在位移—時間圖（displacement–time graph）上，每名騎兵和每支軍隊都是一條直線（或兩段直線），而「彼此相遇」不過是兩條線相交。因此我們以撒克遜軍隊為起點量度位移，寫出每條線的方程，再求它們的交點。題目中的不等式，正正就是各個交點按我們預期的次序出現的條件；而最後一部分所問的，是其中一個條件不成立時會發生甚麼事。

解答

建立圖像

我們把軍隊和騎兵看成沿一條直線運動的點。設 s 為由（靜止的）撒克遜軍隊起計、朝諾曼軍隊方向的位移，並在兩軍相距 d 時開始計時。於是：

- 撒克遜軍隊：$s = 0$。
- 諾曼軍隊：$s = d - ut$。
- 撒克遜騎兵，去程：$s = xt$。他到達諾曼軍隊時 $xt = d - ut$，即在 $t_S = \dfrac{d}{x+u}$，位置為 $s = \dfrac{xd}{x+u}$。他以速率 x 折返，

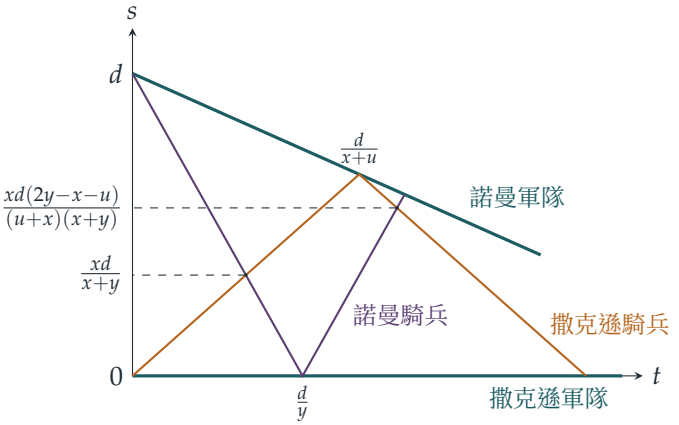
  $$s = \frac{xd}{x+u} - x\left(t - \frac{d}{x+u}\right) = \frac{2xd}{x+u} - xt,$$

  並在 $t = \dfrac{2d}{x+u}$ 回到本陣。
- 諾曼騎兵，去程：$s = d - yt$。他在 $t_N = \dfrac{d}{y}$ 到達撒克遜軍隊，然後以速率 y 折返，

其直線為

$$s = y\left(t - \frac{d}{y}\right) = yt - d.$$

由於 $y > u$，他確實能追上自己的軍隊，此時 $yt - d = d - ut$，即在 $t = \dfrac{2d}{y+u}$。



（圖中取 $u = 1$、$x = 2$、$y = 4$、$d = 1$。）

第一次相遇

兩名騎兵都在去程，所以我們求 $s = xt$ 與 $s = d - yt$ 的交點：$(x+y)t = d$，得

$$t = \frac{d}{x+y}, \qquad s = \frac{xd}{x+y}.$$

這確實發生在兩人掉頭之前，因為 $\frac{d}{x+y}$ 比 $\frac{d}{y}$ 和 $\frac{d}{x+u}$ 都小（後者用到 $y > u$）。

第二次相遇

現在兩名騎兵都在回程：我們求 $s = \dfrac{2xd}{x+u} - xt$ 與 $s = yt - d$ 的交點。兩邊同時加上 $xt + d$，

$$(x+y)t = d + \frac{2xd}{x+u} = \frac{d(3x+u)}{x+u}, \qquad \text{所以} \qquad t_2 = \frac{d(3x+u)}{(x+u)(x+y)}.$$

於是

$$s = \frac{2xd}{x+u} - \frac{xd(3x+u)}{(x+u)(x+y)} = \frac{xd\big(2(x+y) - (3x+u)\big)}{(x+u)(x+y)} = \frac{xd(2y-x-u)}{(u+x)(x+y)},$$

這就是題目要求的第二個距離。

想一想 我們怎樣知道在時刻 t_2 兩名騎兵真的都在回程？

這正是那些不等式派上用場的地方。諾曼騎兵已經掉頭，若 $t_2 \geq \frac{d}{y}$：

$$y(3x+u) \geq (x+u)(x+y) \iff 3xy \geq x^2+xy+ux \iff u \leq 2y-x.$$

撒克遜騎兵已經掉頭，若 $t_2 \geq \frac{d}{x+u}$：

$$3x+u \geq x+y \iff u \geq y-2x.$$

所以條件 $y-2x < u < 2y-x$ 恰好保證 t_2 在兩個掉頭時刻之後。同一個條件 $u < 2y-x$ 亦使 $s>0$，即撒克遜騎兵尚未回到本陣。（還有一個題目沒有明言的要求：諾曼騎兵不可先回到自己的軍隊。把 $t_2 \leq \frac{2d}{y+u}$ 化簡，可得 $(x-u)(2x-y+u) \geq 0$；由於 $2x-y+u>0$，這表示 $x \geq u$，即撒克遜騎兵至少與諾曼軍隊一樣快。這肯定是題目的原意：否則他一掉頭，諾曼軍隊便會越過他。）

情況 (i)：$u > 2y-x$

此時 $t_2 < \frac{d}{y}$：撒克遜騎兵回程的直線與諾曼騎兵*去程*的直線先相交。由於 $y>u$，這個情況需要 $x>y$：撒克遜騎兵是較快的一方。他到達諾曼軍隊後掉頭，在兩人都朝撒克遜軍隊前進時從後追上諾曼騎兵。（求 $s=\frac{2xd}{x+u}-xt$ 與 $s=d-yt$ 的交點，可知這發生在距撒克遜軍隊 $\frac{xd(x+u-2y)}{(x+u)(x-y)}$ 處。）他在 $\frac{2d}{x+u}$ 回到本陣，早於諾曼騎兵到達的時刻 $\frac{d}{y}$，所以兩人不會第二次迎面相遇：諾曼騎兵只是到達撒克遜軍隊，而他的對手早已回來了。

情況 (ii)：$u < y-2x$

此時 $t_2 < \frac{d}{x+u}$：諾曼騎兵快得多。他到達撒克遜軍隊後掉頭，越過仍在朝諾曼軍隊前進的撒克遜騎兵。求 $s=yt-d$ 與 $s=xt$ 的交點，可知這發生在 $t=\frac{d}{y-x}$，距撒克遜軍隊 $\frac{xd}{y-x}$ 處。其後諾曼騎兵在 $\frac{2d}{y+u}$ 回到本陣，早於撒克遜騎兵到達諾曼軍隊的時刻 $\frac{d}{x+u}$（因為 $2(x+u)<y+u$），此後兩人在戰場上再無相遇。

驗算

- 取 $d=1$、$u=1$、$x=2$、$y=4$（如圖所示），公式給出相遇位置為 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{5}{9}$。以 10^{-5} 為時間步長用數值方法逐步模擬這個運動，得到的交點在 0.3333 和 0.5556。
- 若 $y=x+u$，兩個距離相等，都是 $\frac{x}{x+y}d$。這是一個很適合用來檢驗的特殊值。
- 當 $u \to 2y-x$ 時，第二個距離趨向 0：第二次相遇正好發生在撒克遜軍隊處，這就是與情況 (i) 的分界。

常見錯誤

- 把騎兵的回程寫成 $s = -xt$ 或 $s = yt$，忘記把時間原點移到掉頭的一刻。
- 求撒克遜騎兵的掉頭位置時，用了諾曼軍隊在 $t = 0$ 的位置，而不是他到達那一刻的位置。
- 在最後一部分只說「他們不會相遇」。在兩個情況中，他們其實都有第二次相遇，只是兩人同向而行：一人從後越過另一人。

STEP 之外

這類圖像稱為世界線（world lines），是狹義相對論（special relativity）的基本工具。在那裏，運動中的觀察者之間來回發送的光訊號，正是用這種方法分析的（雷達法），而直線的斜率則記錄了相對速度。這裏的代數運算，即把 u 加到一個速率上、又從另一個速率中減去，就是伽利略（Galileo）式的相對速度。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對伽利略圖景和相對論圖景都有論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。