詳細解答

STEP I 2007，第 1 題

純數學 • 數字排列的計數

> **STEP I 2007，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q1

關鍵思路

不要嘗試把平衡數逐一列出。相反，應按兩組數字之和的共同值 s 把它們分類。對於每個 s，前面一對數字和後面一對數字可以獨立地選取，因此數字和為該值的平衡數的數目，就是兩個計數的乘積。於是整個問題歸結為計算把 s 寫成兩個數字之和的方法數目，而這等同於計算正方形網格某條對角線上的格點（lattice point）數目。

解答

把一個四位平衡數寫成 $abcd$，其中每個數字都屬於 $\{0, 1, \ldots, k\}$，$a \geq 1$（首位數字不能是 0），並且

$$a + b = c + d = s$$

其中 s 滿足 $0 \leq s \leq 2k$。對於每個 s，設

- $N(s)$ 為滿足 $c + d = s$ 的數字有序對（ordered pair）(c, d) 的數目；
- $M(s)$ 為滿足 $a \geq 1$ 及 $a + b = s$ 的數字有序對 (a, b) 的數目。

一旦固定了 s，任何一個合乎條件的前數對都可以配上任何一個合乎條件的後數對，所以數字和為 s 的平衡數共有 $M(s)N(s)$ 個。不同的 s 值給出不同的數，因此

$$\text{總數} = \sum_{s=0}^{2k} M(s)\, N(s).$$

計算數對的數目

$N(s)$。若 $0 \le s \le k$，則 c 可以是 $0, 1, \ldots, s$ 中的任何一個，而 $d = s - c$ 自動是一個數字。所以 $N(s) = s + 1$。若 $k < s \le 2k$，則 $d = s - c \le k$ 迫使 $c \ge s - k$，所以 c 由 $s - k$ 取到 k，而 $N(s) = 2k + 1 - s$。

$M(s)$。這個計數與上面相同，只是要減去 $a = 0$ 的那一對（如果它存在的話）。那一對是 $(0, s)$，而它只在 $s \le k$ 時才是容許的。所以

$$M(s) = \begin{cases} s, & 0 \le s \le k, \\ 2k + 1 - s, & k < s \le 2k. \end{cases}$$

特別地，$M(0) = 0$：沒有平衡數的數字和是 0，這是對的，因為 $a \ge 1$。

> **想一想** 為甚麼我們不能只計算所有滿足 $a + b = c + d$ 的四位數字串，然後就此作結？

因為像 0312 這樣的數字串並不是四位數。條件 $a \ge 1$ 只影響前數對，而且只影響較小的和，這正正就是 $M(s)$ 與 $N(s)$ 只在 $s \le k$ 時才有分別的原因。

第 (i) 部分

這裏 $k = 4$，而和的取值由 0 到 8：

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$M(s)$	0	1	2	3	4	4	3	2	1
$N(s)$	1	2	3	4	5	4	3	2	1
$M(s)N(s)$	0	2	6	12	20	16	9	4	1

最底一行加起來是 $(2 + 6 + 12 + 20) + (16 + 9 + 4 + 1) = 40 + 30 = 70$。所以用數字 0 至 4 可以組成七十個四位平衡數，正如題目所求。

第 (ii) 部分

現在利用 M 和 N 的公式，在 $s = k$ 處把和式拆開：

$$\text{總數} = \sum_{s=1}^{k} s(s+1) \; + \; \sum_{s=k+1}^{2k} (2k + 1 - s)^2.$$

（$s=0$ 的一項是零。）在第二個和式中設 $r=2k+1-s$。當 s 由 $k+1$ 取到 $2k$ 時，r 由 k 遞減至 1，所以第二個和式就是 $\sum_{r=1}^{k} r^2$。因此

$$\begin{aligned}\text{總數} &= \sum_{r=1}^{k}(r^2+r)+\sum_{r=1}^{k} r^2 = 2\sum_{r=1}^{k} r^2+\sum_{r=1}^{k} r \\ &= \tfrac{1}{3}k(k+1)(2k+1)+\tfrac{1}{2}k(k+1) \\ &= \tfrac{1}{6}k(k+1)\big(2(2k+1)+3\big) \\ &= \tfrac{1}{6}k(k+1)(4k+5),\end{aligned}$$

其中用到題目給出的 $\sum r^2$ 恆等式（$r=0$ 的一項沒有貢獻）以及 $\sum_{r=1}^{k} r=\tfrac{1}{2}k(k+1)$。這就是所要求的結果。

驗算

- 把 $k=4$ 代入公式，得 $\frac{1}{6}\cdot 4\cdot 5\cdot 21=70$，與第 (i) 部分吻合。
- 當 $k=1$ 時，公式給出 3。直接列舉，只用 0 和 1 的四位平衡數是 1001、1010 和 1111。
- 對所有滿足 $a\geq 1$ 的數字串 $abcd$ 作窮舉（brute-force）計數，結果在 k 由 1 到 15 的每個情況下都與公式相符（例如 $k=9$，即用上全部十進制數字時，結果是 615）。

常見錯誤

- 忘記首位數字的條件，結果得出的是 $\sum N(s)^2=\tfrac{1}{3}(k+1)(2k^2+4k+3)$，當 $k=4$ 時這是 85。
- 在 $s>k$ 時算錯數對的數目：它是 $2k+1-s$，而不是 $s+1$，因為兩個數字都不能超過 k。
- 把中間的和 $s=k$ 在拆開後的兩半中都計算了，或者兩半都沒有計算。

STEP 之外

計數 $N(s)$ 是 $(1+x+\cdots+x^k)^2$ 中 x^s 的係數，而平衡數的總數則是若干個這類多項式之積的某個係數。這種生成函數（generating function）方法同樣能處理 $2n$ 位的平衡數，而在那種情況下直接計數很快便會變得難以應付。它是大學本科組合數學（combinatorics）的核心工具。想做更多同類的計數問題，可試試 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（進階數學問題集）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。