詳細解答

STEP III 2006，第 9 題

力學 • 能量守恆

STEP III 2006，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

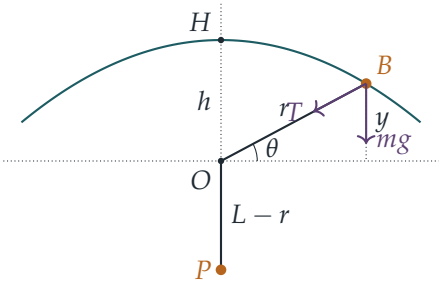
step.maths.org/questions/06-s3-q9

關鍵思路

繩的長度固定，所以小珠與 O 的距離增加多少，質點 P 就上升多少。這樣便把兩者的勢能（potential energy）連繫起來：總勢能只取決於 $y + r$。「在任何位置都處於平衡（equilibrium）」表示勢能並不偏好任何位置，所以它沿着金屬線必定是常數。既然勢能是常數，能量守恆（conservation of energy）便告訴我們總動能（kinetic energy）永不改變，餘下的工作只是用極坐標（polar coordinates）寫出小珠的速率。

解答

模型。P 和 B 是質量為 m 的質點；繩是輕而不可伸長（light and inextensible）的；小環和金屬線都是光滑（smooth）的，所以繩的張力（tension）所作的淨功為零，而金屬線的法向反作用力（normal reaction）不作功。取 O 為原點，x 軸水平，y 軸垂直向上，並設繩長為 L。



金屬線的形狀

由 O 到 B 的一段繩長為 r，所以 OP 的長度是 $L-r$，即 P 位於 O 之下 $L-r$ 的距離。取通過 O 的水平面為勢能的零點，總勢能為

$$U = mgy - mg(L-r) = mg(y+r) - mgL.$$

這個系統只有一個自由度（degree of freedom），即小珠在金屬線上的位置，而平衡位置就是 U 沿金屬線的駐點（stationary point）。如果每一個位置都是平衡位置，那麼沿着金屬線處處都有 $\mathrm{d}U/\mathrm{d}s = 0$（其中 s 是弧長（arc length)），所以 U 沿金屬線是常數。因此 $y+r$ 是常數。

在 H 處，小珠位於 O 的正上方，高度為 h，所以該處 $y = h$ 且 $r = h$，這個常數就是 $2h$。於是金屬線的方程是

$$y + r = 2h,$$

正如題目所求。（寫成直角坐標形式，由 $x^2 + y^2 = (2h-y)^2$ 得 $y = h - x^2/(4h)$：這是一條以 O 為焦點（focus）的拋物線（parabola），如圖所示。你也可以直接驗證平衡：由於 P 處於平衡，張力是 mg；沿 BO 方向的 mg 與垂直向下的 mg 的合力（resultant）平分這兩個方向之間的夾角，而根據拋物線的反射性質（reflection property），這正好是拋物線在該點的法線（normal）方向。）

θ 的變化率

在金屬線上 $y = 2h - r$，所以

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2h}{r} - 1.$$

對時間求導，

$$\cos\theta\,\dot\theta = -\frac{2h\dot r}{r^2}.$$

由於 $\theta = \arcsin(y/r)$ 位於 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 之內，我們有 $\cos\theta \geq 0$，所以

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{2h-r}{r}\right)^2} = \frac{\sqrt{r^2 - (2h-r)^2}}{r} = \frac{\sqrt{4rh - 4h^2}}{r} = \frac{2\sqrt{rh-h^2}}{r}.$$

小珠離開 H 之後，我們有 $r > h$（因為 $r = 2h - y$，而在 H 以外 $y < h$），所以 $\cos\theta \neq 0$，可以放心相除：

$$\dot\theta = -\frac{2h\dot r}{r^2} \cdot \frac{r}{2\sqrt{rh-h^2}} = -\frac{h\dot r}{r\sqrt{rh-h^2}},$$

這就是所求的結果。

P 的速率

想一想 為甚麼總動能必須一直等於 $\frac{1}{2}mV^2$？

對系統作功的力只有重力和繩的張力（屬內力）。張力所作的淨功為零：繩不可伸長，小環又光滑，所以張力對 B 所作的功與對 P 所作的功互相抵銷。金屬線是光滑的，所以它的反作用力不作功。因此動能與勢能之和守恆。但我們剛剛證明了勢能 U 沿這條金屬線是常數，所以動能也是常數。

開始時小珠在 H，該處 r 取最小值 h（因為 y 在該處最大）。所以最初 $\dot{r}=0$，而 P 的速率是 $|\dot{r}|$，故它由靜止開始運動。因此初始動能是 $\frac{1}{2}mV^2$。

在以 O 為極點的極坐標中，小珠速率的平方是 $\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2$。利用 $\dot{\theta}$ 的結果，

$$r^2\dot{\theta}^2=\frac{h^2\dot{r}^2}{rh-h^2}=\frac{h\dot{r}^2}{r-h},\qquad \text{所以}\qquad v_B^2=\dot{r}^2\Big(1+\frac{h}{r-h}\Big)=\frac{r\dot{r}^2}{r-h}.$$

由動能守恆，約去 $\frac{1}{2}m$ 之後得

$$\frac{r\dot{r}^2}{r-h}+\dot{r}^2=V^2\quad\Longrightarrow\quad \dot{r}^2\,\frac{2r-h}{r-h}=V^2.$$

由於 $r>h$，$r-h$ 和 $2r-h$ 都是正數，所以 P 的速率是

$$|\dot{r}|=V\Big(\frac{r-h}{2r-h}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

正如題目所求。

驗算

- 在 H 處，$r=h$，公式給出 0：正確，因為 P 由靜止開始。
- 當 $r\to\infty$ 時，P 的速率趨向 $V/\sqrt{2}$。在很遠的地方，小珠幾乎沿徑向運動，所以 B 和 P 的速率幾乎相等，兩者平分動能。
- 數值驗證：取 $h=1$ 和 $V=2$，我們沿 $y=1-\frac{1}{4}x^2$ 逐步計算小珠的運動方程（用 RK4），並把 $\dot{\theta}$ 和 $\dot{r}$ 的有限差分值與公式比較。在 $r\approx 4.043$ 時，P 的速率是 1.31064，與 $2\sqrt{3.043/7.087}$ 吻合至六位有效數字。

常見錯誤

- 把 P 的勢能取為 $+mg(L-r)$：P 在 O 的下方，所以它的高度是 $-(L-r)$。
- 忘記 P 也在運動，於是寫成 $\frac{1}{2}mv_B^2=\frac{1}{2}mV^2$。
- 除以 $\cos\theta$ 時，沒有指出它只在 H 處才等於零。

STEP 之外

尋找一條曲線，使系統在其上處處都處於「隨遇」平衡（neutral equilibrium），是「平衡位置即勢能的駐點」這個原理的一個小例子。這個原理通往拉格朗日力學（Lagrangian mechanics），在那裏，像繩和金屬線這樣的約束（constraints）是透過選取合適的坐標而直接納入其中的。在這一題，單一個坐標 r 已經足夠，而能量守恆就是首次積分（first integral）。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）正是以這種精神講解能量方法和極坐標。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。