詳細解答

# STEP III 2006，第 8 題

純數學 • 公理化微分法

> **STEP III 2006，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q8

## 關鍵思路

這四條規則正是你日常使用的求導（differentiation）性質：線性（linearity）和積法則（product rule），再加上一個事實，就是 $x$「求導後得」1。每個多項式（polynomial）都是由數字 1 和字母 $x$ 經過相乘和相加構成的，所以只要知道 $\triangle$ 對 1 和對 $x$ 的作用，這些規則就令它在其他地方再無任何自由。把積法則應用於 $x \cdot x^n$，便可對冪次作歸納法（induction），最後再由線性完成餘下的工作。

## 解答

以下「規則 (i)」至「規則 (iv)」均指題目所給的四條定義規則，次序與題目相同。

### 常數

先考慮常數多項式 1。由於 $1 = 1 \cdot 1$，在規則 (iv) 中取 $f(x) = g(x) = 1$，得

$$\triangle 1 = \triangle(1 \cdot 1) = 1 \cdot \triangle 1 + 1 \cdot \triangle 1 = 2\,\triangle 1.$$

兩邊同時減去 $\triangle 1$，得 $\triangle 1 = 0$（零多項式）。

> ? **想一想** 為甚麼不直接說「$\triangle$ 作用於常數得零，就像導數一樣」？

因為我們還不知道 $\triangle$ 就是導數（derivative）；這正是最後一部分要我們證明的。我們能用的只有那四條規則，而其中沒有一條直接提及常數。竅門在於 1 等於它自己的平方，所以積法則迫使 $\triangle 1$ 等於它自身的兩倍。

現設 $f(x) = \lambda$ 為任意常數。則 $\lambda = \lambda \cdot 1$，故由規則 (iii)

$$\triangle\lambda = \triangle(\lambda \cdot 1) = \lambda \triangle 1 = \lambda \cdot 0 = 0.$$

所以對每個次數（degree）為零的多項式，都有 $\triangle f(x) = 0$，正如所求。

### 平方與立方

把 $x^2 = x \cdot x$ 寫出，先用規則 (iv)，再用規則 (i)，

$$\triangle x^2 = x \triangle x + x \triangle x = x \cdot 1 + x \cdot 1 = 2x.$$

把 $x^3 = x \cdot x^2$ 寫出，先用規則 (iv)，再用剛得到的結果和規則 (i)，

$$\triangle x^3 = x \triangle x^2 + x^2 \triangle x = x \cdot 2x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

### 一般多項式

*步驟 1：$x$ 的冪。*我們用歸納法證明

$$\triangle x^n = n\, x^{n-1} \qquad \text{對每個整數} n \geq 1.$$

當 $n = 1$ 時，這就是 $\triangle x = 1$，即規則 (i)。假設結果對某個 $n = k \geq 1$ 成立。由於 $x^{k+1} = x \cdot x^k$，規則 (iv) 給出

$$\begin{aligned} \triangle x^{k+1} &= x \triangle x^k + x^k \triangle x \\ &= x \cdot k\, x^{k-1} + x^k \cdot 1 \\ &= (k+1)\, x^k, \end{aligned}$$

其中第二行用了歸納假設（induction hypothesis）和規則 (i)。所以結果對 $n = k+1$ 成立，由歸納法可知它對所有 $n \geq 1$ 成立。當 $n = 0$ 時，$x^0 = 1$，而我們已證明 $\triangle 1 = 0$，這與 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 1 = 0$ 一致。所以對每個 $n \geq 0$，

$$\triangle x^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x^n.$$

*步驟 2：多項之和。*規則 (ii) 只是就兩個多項式而言，但它可以推廣至任意有限個。若 $\triangle(f_1 + \cdots + f_m) = \triangle f_1 + \cdots + \triangle f_m$，則把規則 (ii) 應用於 $f_1 + \cdots + f_m$ 和 $f_{m+1}$ 這兩個多項式，得

$$\triangle(f_1 + \cdots + f_{m+1}) = \triangle(f_1 + \cdots + f_m) + \triangle f_{m+1} = \triangle f_1 + \cdots + \triangle f_{m+1},$$

所以對 $m$ 作歸納法，可知它對任意多項都成立。

步驟 3：綜合起來。任何多項式都可以寫成 $h(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$，其中 $a_k$ 為常數。於是

$$\begin{aligned}
\triangle h(x) &= \sum_{k=0}^{n} \triangle\left(a_k x^k\right) && \text{根據規則 (ii)，並按步驟 2 推廣}\\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \triangle x^k && \text{根據規則 (iii)}\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\, a_k\, x^{k-1} && \text{根據步驟 1（}k=0\text{ 的項為 0）}\\
&= \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x},
\end{aligned}$$

最後一行就是多項式通常的導數。這對每個多項式 $h(x)$ 都成立，所以 $\triangle h(x) \equiv \dfrac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}$，正如所求。

## 驗算

令人安心的是，普通的求導確實符合全部四條規則，所以這些規則並不互相矛盾，而 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ 的確是題目所描述的那類運算。你也可以用公式來檢驗積法則：取 $f = x^2$ 和 $g = x^3$，規則 (iv) 給出 $x^2 \cdot 3x^2 + x^3 \cdot 2x = 5x^4$，這正是 $\triangle x^5$。我們在電腦上只用這些規則（如步驟 1 至 3）構造出 $\triangle$，並把它與導數作精確比較，共測試了 2000 個次數不超過 9 的隨機多項式；例如 $\triangle\left(\frac{1}{2}x^4 - 3x + 7\right) = 2x^3 - 3$，這也與數值差商（difference quotient）吻合。

## 常見錯誤

- 斷言 $\triangle(\text{常數}) = 0$，「因為它是導數」。這是預先假設了最終答案；這個結果必須由規則推導出來。
- 不加說明就把規則 (ii) 用於一長串的和。規則只是就兩個多項式而言，所以項數更多時，需要用一句話交代歸納法。
- 沒有說明哪一步用了哪條規則：題目明確要求這樣做。

## STEP 之外

符合線性和積法則的運算稱為**導子**（derivation），而這裏的論證顯示，在多項式上，導子完全由它在 $x$ 上的值決定。假如改為 $\triangle x = p(x)$，其中 $p$ 為某個多項式，同樣的證明會給出 $\triangle h = p(x)\, h'(x)$。求導可以純粹用代數方法定義，完全不涉及極限，這個想法在抽象代數（abstract algebra）和微分幾何（differential geometry）中佔有核心地位；在

微分幾何中，向量場（vector field）正正就是函數上的導子。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）是認識以代數方式處理多項式環（polynomial ring）的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。