詳細解答

# STEP III 2006，第 7 題

純數學 • 一階微分方程

> **STEP III 2006，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q7

## 關鍵思路

兩條微分方程（differential equation）都是關於 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 的二次方程。我們不急於把它們當作微分方程來處理，而是先就導數（derivative）解出每條二次方程，這樣原方程便分拆成兩條普通的一階方程。利用雙曲恆等式（hyperbolic identities），兩個根會化簡成很簡單的形式，而 $x = 0$ 處的條件則告訴我們應該跟隨哪一個根。

## 解答

### 第 (i) 部分

由二次公式（quadratic formula），

$$u = -\sinh x \pm \sqrt{\sinh^2 x + 1} = -\sinh x \pm \cosh x,$$

因為 $\sinh^2 x + 1 = \cosh^2 x$ 而且 $\cosh x > 0$。利用 $\cosh x + \sinh x = \mathrm{e}^x$ 和 $\cosh x - \sinh x = \mathrm{e}^{-x}$，兩個根是

$$u = \mathrm{e}^{-x} \qquad 或 \qquad u = -\mathrm{e}^x.$$

微分方程就是這條二次方程，其中 $u = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$，所以在每一個 $x$ 處必有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x} \qquad 或 \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{e}^x.$$

第一個根恆為正，第二個根恆為負，所以兩者永不相等。因此，導數連續（continuous）的解不可能由一個根跳到另一個根，而 $x = 0$ 處 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x > 0$ 這個條件，就決定了自始至終都取第一個根。積分後得 $y = -\mathrm{e}^{-x} + c$，再由 $x = 0$ 時 $y = 0$ 得 $c = 1$：

$$y = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

**第 (ii) 部分**

設 $p = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$。若 $\sinh y = 0$，即 $y = 0$，方程便化為 $2p = 0$。$y \equiv 0$ 就是這樣成為一個解的，而題目正是叫我們把這個解撇開不理。在 $y \neq 0$ 之處，由二次公式得

$$p = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \sinh^2 y}}{\sinh y} = \frac{-1 \pm \cosh y}{\sinh y}.$$

利用半角形式（half-angle forms）$\cosh y - 1 = 2\sinh^2 \frac{y}{2}$、$\cosh y + 1 = 2\cosh^2 \frac{y}{2}$ 和 $\sinh y = 2\sinh \frac{y}{2} \cosh \frac{y}{2}$，兩個根是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tanh \frac{y}{2} \qquad 或 \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\coth \frac{y}{2}.$$

這兩個根永不相等，因為它們的積是 $-1$，而若兩根相等，其積應為 $\tanh^2 \frac{y}{2} \geq 0$。

**想一想** 兩條方程之中，哪一條可以給出一個通過原點而又不恆等於零的解？

第一條方程 $y' = \tanh \frac{y}{2}$ 有解 $y \equiv 0$。它的右邊是 $y$ 的光滑函數（smooth function），所以通過 $(0,0)$ 的解就只有這一個：這又是那個平凡解（trivial solution）。第二條方程在 $y = 0$ 處是奇異（singular）的，該處 $|\mathrm{d}y/\mathrm{d}x| \to \infty$，所以它的解曲線可以帶着鉛垂切線與 $y = 0$ 相交。這正是我們要找的解。分離變數（separating the variables），

$$\int \tanh \frac{y}{2}\, \mathrm{d}y = -\int \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad 2\ln\cosh \frac{y}{2} = -x + C.$$

代入 $x = 0$ 時 $y = 0$，得 $C = 0$，所以 $\cosh^2 \frac{y}{2} = \mathrm{e}^{-x}$。由於 $\cosh y = 2\cosh^2 \frac{y}{2} - 1$，

$$\cosh y = 2\mathrm{e}^{-x} - 1.$$

我們可以直接驗證這個結果。求導得 $\sinh y\, y' = -2\mathrm{e}^{-x} = -(\cosh y + 1)$，這正是 $y' = -\coth \frac{y}{2}$。無論 $y$ 是正是負，這都成立，所以整條曲線，包括上半和下半，都是解。由於 $\cosh y \geq 1$，曲線只在 $x \leq 0$ 時存在。它關於 $x$ 軸對稱。在原點附近 $1 + \frac{1}{2}y^2 \approx 1 - 2x$，所以曲線在那裏看起來像拋物線 $y^2 = -4x$。

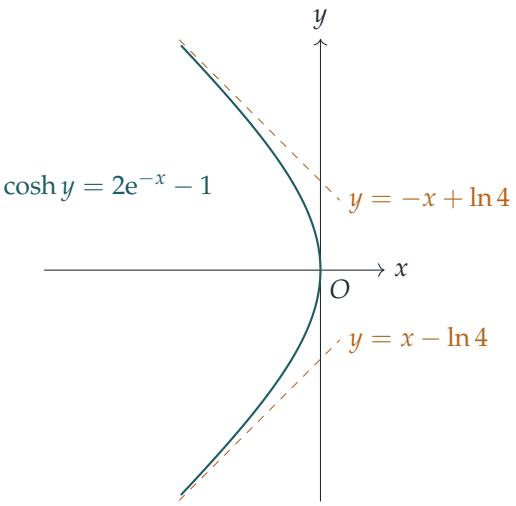
**漸近線(asymptotes)**。 當 $x \to -\infty$ 時，$\cosh y \to \infty$，所以 $|y| \to \infty$。設 $w = 2\mathrm{e}^{-x} - 1$，則

$$|y| = \operatorname{arcosh} w = \ln\bigl(w + \sqrt{w^2 - 1}\bigr),$$

所以

$$|y| - (-x + \ln 4) = \ln \frac{w + \sqrt{w^2 - 1}}{4\mathrm{e}^{-x}} = \ln\Bigl(\frac{w}{4\mathrm{e}^{-x}}\Bigl(1 + \sqrt{1 - w^{-2}}\Bigr)\Bigr).$$

當 $x \to -\infty$ 時，$w/(4\mathrm{e}^{-x}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{x} \to \frac{1}{2}$，而 $1 + \sqrt{1 - w^{-2}} \to 2$，所以對數內的式子趨向 1，上述差值趨向 0。因此曲線的上半趨近 $y = -x + \ln 4$，而由對稱性，下半趨近 $y = -(-x + \ln 4)$。漸近線是 $y = \pm(-x + \ln 4)$，正如題目所求。（當 $x \to 0^-$ 時曲線保持有界，所以漸近線就只有這兩條。）




## 驗算

- 在 (i) 中，$y = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ 的導數是 $y' = \mathrm{e}^{-x}$，而 $\mathrm{e}^{-2x} + 2\mathrm{e}^{-x}\sinh x - 1 = \mathrm{e}^{-2x} + (1 - \mathrm{e}^{-2x}) - 1 = 0$。
- 在 (ii) 中，由原點附近開始，以數值方法逐步求解 $y' = -\coth\frac{y}{2}$ 直到 $x = -6$，得 $y \approx 7.38505$，與 $\operatorname{arcosh}(2\mathrm{e}^6 - 1)$ 吻合。在 $x = -10$ 處，曲線與 $-x + \ln 4$ 之間的差距約為 $2 \times 10^{-5}$。

## 常見錯誤

- 在 (i) 中取了 $-\sinh x - \cosh x = -\mathrm{e}^x$ 這個根：這樣導數在 $x = 0$ 處是負數。
- 在 (ii) 中因為 $y' = \tanh\frac{y}{2}$ 在 $y = 0$ 處「性質良好」而選了它。通過原點時，它只給出 $y \equiv 0$。
- 忘記了曲線的下半；這一半有 $y < 0$，第二條漸近線正是由它而來。

## STEP 之外

像這兩條方程一樣，對 $y'$ 而言並非線性的方程，稱為一階隱式（first-order implicit）方程。就 $y'$ 求解，會把它分拆成若干個分支。第 (ii) 部分亦顯示解的唯一性（uniqueness）可以不成立：在 $y = 0$ 處，右邊的 $-\coth\frac{y}{2}$ 不滿足利普希茨（Lipschitz）條件，所以一個非平凡解才可以與 $y \equiv 0$ 從同一點出發。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科書）講述了存在性與唯一性定理，以及這些定理在甚麼情

況下適用。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。