詳細解答

STEP III 2006，第 6 題

純數學 • 極坐標曲線與反射

> **STEP III 2006，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q6

關鍵思路

斜率（gradient）公式不過是把鏈式法則（chain rule）應用於 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 而已。至於鏡面，把極點（pole）設在 O，並令始線（initial line）沿着 L：這樣，在點 P 反射的光線便沿着徑向直接返回，因此其方向只由 θ 決定。反射定律（law of reflection）指出法線（normal）平分兩條光線之間的夾角，於是法線（以至切線（tangent））便可用 θ 確定下來。這樣一來，幾何問題就化為關於 $r(\theta)$ 的可分離變數微分方程（separable differential equation）。

解答

極坐標下的斜率

由 $r = r(\theta)$ 給出的曲線，其直角坐標（Cartesian coordinates）為 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，其中 r 是 θ 的函數。利用積法則（product rule）對 θ 求導，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta.$$

根據鏈式法則，凡是 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta \neq 0$ 之處，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\tan\theta + r}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} - r\tan\theta},$$

這裏把分子和分母同除以 $\cos\theta$（當 $\cos\theta \neq 0$ 時可以這樣做）。這就是所求的斜率。

未經相除的形式也值得保留：向量

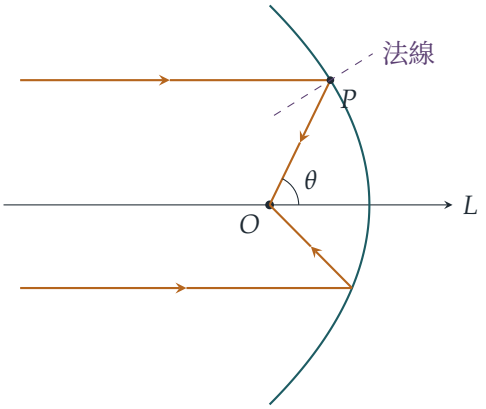
$$\mathbf{t} = \left(\tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta,\ \tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta\right)$$

在曲線上每一點都沿着切線方向，包括 $\tan\theta$ 或斜率無定義的地方。

鏡面

任取一個包含 L 的平面 Π，並設 P 為鏡面與 Π 相交的一點。在 P 的入射光線（incident ray）平行於 L，所以它位於 Π 之內；反射光線（reflected ray）通過 O，而該點在 L 上，所以它同樣位於 Π 之內。反射定律亦要求在 P 的法線位於兩條光線所在的平面內，因此法線位於 Π 之內，而交線在 P 的切線就是 Π 內與法線垂直的那條直線。所以一切都發生在平面 Π 之內，我們可以在二維中處理問題。

在 Π 內採用極坐標（polar coordinates），以 O 為極點，始線沿着 L，並選定方向使入射光沿 $\theta = 0$ 的方向行進（即圖中由左至右）。設 P 為 (r,θ)，其中 $-\pi < \theta < \pi$。（$\theta = \pi$ 所對應的點位於 L 上、O 的後方，光線在那裏會直接穿過 O，根本不需要鏡面。）



法線的方向。 在 P 取兩個沿着光線、背向 P 的單位向量（unit vectors）：

$$\mathbf{a} = (-1,\, 0) \text{（沿入射光線往回走）}, \qquad \mathbf{b} = (-\cos\theta,\, -\sin\theta) \text{（指向 } O\text{）}.$$

法線與 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 所成的角相等，所以它沿着兩者夾角的平分線，亦即 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 的方向（兩個單位向量所構成的菱形，其對角線平分它們的夾角）。現在

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = -(1+\cos\theta,\, \sin\theta) = -2\cos\tfrac{\theta}{2}\left(\cos\tfrac{\theta}{2},\, \sin\tfrac{\theta}{2}\right),$$

這裏用了 $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ 和 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$。由於 $-\pi < \theta < \pi$，$\cos\frac{\theta}{2} > 0$，所以這個向量非零，而在 P 的法線沿着

$$\mathbf{n} = \left(\cos\tfrac{\theta}{2},\, \sin\tfrac{\theta}{2}\right):$$

法線與 L 所成的角為 $\frac{\theta}{2}$。

想一想 為甚麼不直接令斜率公式等於切線的斜率？

這樣做是可以的：切線垂直於 $\mathbf{n}$，所以其斜率為 $-\cot\frac{\theta}{2}$，令它等於極坐標公式並去分母，便會得到與下文相同的方程。不過這條路要除以 $\tan\theta$、$\cot\frac{\theta}{2}$ 以及公式中的分母，所以在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ 處行不通。採用切向量 $\mathbf{t}$ 則可避開這一切麻煩。

微分方程。 切線垂直於法線，所以 $\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}=0$：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\left(\cos\theta\cos\tfrac{\theta}{2}+\sin\theta\sin\tfrac{\theta}{2}\right)+r\left(\cos\theta\sin\tfrac{\theta}{2}-\sin\theta\cos\tfrac{\theta}{2}\right)=0.$$

根據複角公式（compound-angle formulae），兩個括號分別等於 $\cos\left(\theta-\frac{\theta}{2}\right)=\cos\frac{\theta}{2}$ 和 $\sin\left(\frac{\theta}{2}-\theta\right)=-\sin\frac{\theta}{2}$。因此

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\tfrac{\theta}{2}=r\sin\tfrac{\theta}{2},\qquad\text{即}\qquad\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\tan\tfrac{\theta}{2},$$

這裏除以了 $r\cos\frac{\theta}{2}$，由於 $P\neq O$ 且 $-\pi<\theta<\pi$，它是正數。

求解。 這個方程是可分離變數的。對 θ 積分，並注意到 $\int\tan\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta=-2\ln\cos\frac{\theta}{2}$（因為 $\cos\frac{\theta}{2}>0$，此式成立），

$$\ln r=-2\ln\cos\tfrac{\theta}{2}+C\quad\Longrightarrow\quad r\cos^2\tfrac{\theta}{2}=k,$$

其中 $k=\mathrm{e}^C>0$ 沿着整條曲線是常數（曲線是區間 $-\pi<\theta<\pi$ 上單獨一段連通的 $r=r(\theta)$）。利用 $2\cos^2\frac{\theta}{2}=1+\cos\theta$，

$$r(1+\cos\theta)=2k.$$

轉換為直角坐標。 以 $x=r\cos\theta$ 和 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 代入，上式變成 $\sqrt{x^2+y^2}=2k-x$。兩邊平方（兩邊均為非負，因為 $2k-x=r\geq0$），

$$x^2+y^2=4k^2-4kx+x^2\qquad\Longrightarrow\qquad y^2=4k(k-x).$$

這是一條拋物線（parabola），以 L 為軸，頂點（vertex）在 $(k,0)$，焦點（focus）在原點 O，開口朝向入射光的來向。由於 Π 是任意一個包含 L 的平面，鏡面與每一個這樣的平面的交線都是拋物線，這正是所要證明的。■

驗算

- 倒過來檢驗：在 $y^2=4k(k-x)$ 上，法線沿着 $(4k,\,2y)$；把方向 $(1,0)$ 對這條法線作反射，便得到一條通過 O 的光線。我們以數值方法在 10^4 個隨機點上驗證了這一點

（取 $k = 1.3$），並且用有限差分（finite differences）驗證了 $r = 2k/(1+\cos\theta)$ 滿足 $r'/r = \tan\frac{\theta}{2}$。

- 對於隨機選取的曲線 $r(\theta)$，斜率公式與有限差分所得的斜率相符，誤差約為 10^{-8}。
- 在 $\theta = 0$ 處，法線沿着 L，而切線垂直於 L：這就是頂點 $(k, 0)$，沿 L 射來的光線在那裏會直接反射回來並通過 O。

常見錯誤

- 以外角平分線（external bisector）$\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 作為法線。這個方向與兩條光線所成的角是互補而非相等，並會導致 $r'/r = -\cot\frac{\theta}{2}$，其解 $r(1-\cos\theta) = 2k$ 是一條開口朝相反方向的拋物線，所聚焦的是從相反方向射來的光。
- 忘記解釋為何問題是二維的：法線必須位於包含 L 和 P 的平面內，否則交線的切線未必就是我們所用的那一條。
- 把 $\sqrt{x^2+y^2} = 2k - x$ 兩邊平方時，沒有指出兩邊均為非負。

STEP 之外

這塊鏡面是一個旋轉拋物面（paraboloid of revolution），而這裏所證明的性質其實就是焦點－準線（focus–directrix）性質的另一種面貌：$r(1+\cos\theta) = 2k$ 是說，與 O 的距離等於與直線 $x = 2k$ 的距離。這正是衛星碟形天線、汽車車頭燈和反射望遠鏡都採用拋物面的原因。更一般地說，所有圓錐曲線（conics）都具有極坐標形式 $r(1+e\cos\theta) = \ell$，而這恰恰就是牛頓（Newton）求解行星軌道時所出現的式子；Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）由平方反比定律（inverse-square law）把它推導出來。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。