詳細解答

STEP III 2006，第 5 題

純數學 • 複數與幾何

> **STEP III 2006，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q5

關鍵思路

一個三角形是等邊三角形（equilateral triangle），當且僅當從某個頂點看，其中一條邊是另一條邊旋轉 60° 的結果。在複數（complex number）中，這個旋轉就是乘以 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/3}$，而這兩個數正好是 $t^2 - t + 1 = 0$ 的根。把原點移到其中一個頂點，那個對稱式便恰好化為這個二次式。此後，三次方程的部分用韋達公式（Vieta's formulae）即可，而最後一部分只需留意 $z \mapsto pw + q$ 只是把圖形旋轉、縮放和平移。

解答

等邊三角形的條件

設 $u = \beta - \alpha$ 和 $v = \gamma - \alpha$，即由頂點 α 出發的兩條邊。由於各點互不相同，$u \neq 0$、$v \neq 0$ 且 $u \neq v$。首先，

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta = \tfrac{1}{2}[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2],$$

把右邊展開即可驗證。現在 $\alpha - \beta = -u$、$\gamma - \alpha = v$ 及 $\beta - \gamma = u - v$，所以方括號內的式子是 $u^2 + (u - v)^2 + v^2 = 2(u^2 - uv + v^2)$。因此

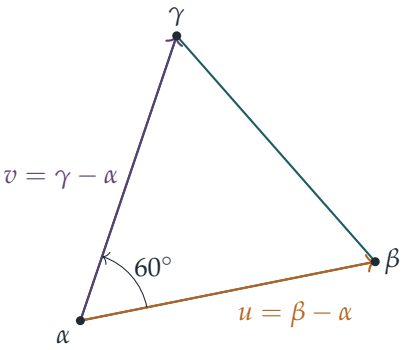
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta = u^2 - uv + v^2 = u^2(t^2 - t + 1), \qquad t = \frac{v}{u}.$$

由於 $u \neq 0$，這個式子等於零當且僅當 $t^2 - t + 1 = 0$，即

$$t = \frac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/3}.$$

想一想 為甚麼 $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/3}$ 恰好表示這個三角形是等邊三角形？

v/u 的模（modulus）是 $|\gamma-\alpha|/|\beta-\alpha|$，而它的輻角（argument）是在 α 處由邊 $\alpha\beta$ 轉到邊 $\alpha\gamma$ 的角。所以 $v/u=\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/3}$ 的意思是：由 α 出發的兩條邊相等，而它們之間的夾角是 $60°$。這樣的等腰三角形，底角是 $\frac{1}{2}(180°-60°)=60°$，所以它是等邊三角形。反過來，如果三角形是等邊的，則 $|v|=|u|$，而 α 處的角是 $60°$，至於向哪一邊轉則視乎三角形的定向（orientation），所以 $v/u=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ 或 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$。



因此，這些互不相同的點（不論次序）構成等邊三角形，當且僅當該式等於零，正如題目所要求。

三次方程

設 $(*)$ 的根為 α,β,γ。根據韋達公式，$\alpha+\beta+\gamma=-a$ 及 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$。所以

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta&=(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\&=a^2-3b.\end{aligned}$$

根據第一個結果，這些（互不相同的）根構成等邊三角形，當且僅當 $a^2-3b=0$，即 $a^2=3b$。

有一點要留意：第一個結果需要各點互不相同。如果有兩個根重合，例如 $\alpha=\beta$，該式便化為 $(\gamma-\alpha)^2$，所以只有當三個根全部相等時它才等於零。因此，在有重根（repeated root）的情況下，$a^2=3b$ 只會在三重根時出現，即 $z^3+az^2+bz+c=(z+\frac{a}{3})^3$，亦即同時有 $c=a^3/27$。除了這個只有一點的退化「三角形」之外，$a^2=3b$ 正是所求的條件。

變換

把 $z = pw + q$ 代入 $(*)$，再除以 $p^3 \neq 0$：

$$w^3 + \frac{3q + a}{p}\, w^2 + \frac{3q^2 + 2aq + b}{p^2}\, w + \frac{q^3 + aq^2 + bq + c}{p^3} = 0.$$

所以

$$A = \frac{3q + a}{p}, \qquad B = \frac{3q^2 + 2aq + b}{p^2},$$

因而

$$A^2 - 3B = \frac{(9q^2 + 6aq + a^2) - (9q^2 + 6aq + 3b)}{p^2} = \frac{a^2 - 3b}{p^2}.$$

如果 $(*)$ 的根構成等邊三角形，則它們互不相同，而且 $a^2 = 3b$，所以 $A^2 = 3B$。$(**)$ 的根是 $w = (z - q)/p$，其中 z 是 $(*)$ 的根；由於 $p \neq 0$，這個映射是一對一（one-to-one）的，所以這些根同樣互不相同。根據上一個結果，$(**)$ 的根構成等邊三角形。

從幾何角度看，這並不意外：$w = (z - q)/p$ 是平移 $-q$、旋轉 $-\arg p$ 再縮放 $1/|p|$ 倍，而這些運算都不會破壞等邊三角形。用第一部分的說法，每條邊都除以 p，所以比 v/u 不變。

驗算

- 單位立方根（cube roots of unity）$1, \omega, \omega^2$ 構成等邊三角形，而且是 $z^3 - 1 = 0$ 的根，其中 $a = b = 0$，所以 $a^2 = 3b$ 成立。
- 取 $\alpha = 0$、$\beta = 1$ 及 $\gamma = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，該式為 $1 + \gamma^2 - \gamma$，它等於零，因為 $\gamma = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ 是 $t^2 - t + 1$ 的根。
- 以 1000 組隨機三元組作數值驗算，證實了對於以這些數為根的三次方程，$\sum \alpha^2 - \sum \alpha\beta = a^2 - 3b$ 成立。同一驗算亦證實了 $A^2 - 3B = (a^2 - 3b)/p^2$，以及在隨機選取的 p 和 q 之下，構成等邊三角形的根仍然構成等邊三角形。

常見錯誤

- 只檢查一種定向：$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$ 都會出現，而「當且僅當」需要兩者兼顧。
- 忘記了正是因為 $u \neq 0$（各點互不相同），我們才可以除以 u^2。
- 代入時把 B 算錯：w 的係數包括來自立方項的 $3q^2$、來自平方項的 $2aq$，以及 b，全部再除以 p^2。

STEP 之外

映射 $z \mapsto pz + q$ 就是平面上的正向相似變換（direct similarity）。在這些映射下保持不變的量，例如比 $(\gamma - \alpha)/(\beta - \alpha)$，或者 $a^2 - 3b$ 是否等於零，稱為不變量（invariant），這是幾何和代數中的核心概念。$a^2 - 3b$ 這個式子（除了一個常數因子外）就是 f' 的判別式（discriminant），其中 $f(z) = z^3 + az^2 + bz + c$。這又連繫到一個漂亮的事實——Marden 定理（Marden's theorem）：以 f 的根為頂點的三角形，有一個橢圓與它的三邊相切於各邊中點，而 f' 的根正是這個橢圓的焦點。對於等邊三角形，這個橢圓是一個圓，它的兩個焦點合而為一，成為 f' 的二重根。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）正是以這種精神來闡述複數幾何。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。