詳細解答

STEP III 2006，第 4 題

純數學 • 函數方程

> **STEP III 2006，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q4

關鍵思路

開首的恆等式(identity)就是柯西函數方程(Cauchy's functional equation)。代入 $y = x$，便得到 f 在 x 與在 $2x$ 的值之間的關係；把這個關係求導 n 次，再令 $x = 0$，麥克勞林級數（Maclaurin series）的係數便幾乎全部消失。其後每一部分都是同一條方程的變奏：只要作一個變數代換（change of variable）（對數、指數、正切），新的恆等式就會變回 $(*)$，於是可以直接套用已經得到的答案。

解答

基本方程

在 $(*)$ 中代入 $y = x$：$\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(2x)$，即

$$2\mathrm{f}(x) \equiv \mathrm{f}(2x).$$

這是關於 x 的恆等式，所以兩邊可以求導。根據鏈式法則（chain rule），每對 $\mathrm{f}(2x)$ 求導一次，就多出一個因子 2，因此求導 n 次之後得

$$2\mathrm{f}^{(n)}(x) \equiv 2^n \mathrm{f}^{(n)}(2x).$$

令 $x = 0$，得 $(2 - 2^n)\,\mathrm{f}^{(n)}(0) = 0$。取 $n = 2$，此式即 $-2\mathrm{f}''(0) = 0$，所以 $\mathrm{f}''(0) = 0$，正是所求。

同樣的論證對每個 $n \neq 1$ 都成立：因子 $2 - 2^n$ 只在 $n = 1$ 時才等於零，所以

$$\mathrm{f}(0) = 0 \quad \text{及} \quad \mathrm{f}^{(n)}(0) = 0 \text{ 對所有} n \geq 2.$$

（$n = 0$ 的情況就是 $2f(0) = f(0)$。）麥克勞林級數中只有一次項留下來：

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \tfrac{1}{2!}f''(0)\,x^2 + \cdots = kx, \qquad k = f'(0).$$

反過來，$kx + ky = k(x+y)$，所以每個這樣的函數都滿足方程。$(*)$ 的通解是 $f(x) = kx$，其中 k 是任意常數。

第 (i) 部分

要取對數，必須有 $g > 0$，所以先處理正負號的問題。代入 $x = y = \frac{1}{2}s$，得 $g(s) = (g(\frac{1}{2}s))^2 \geq 0$。若對某個 a 有 $g(a) = 0$，則對每個 x，

$$g(x) = g(a)\,g(x-a) = 0,$$

所以 $g \equiv 0$，而它確實滿足恆等式。否則對所有 x 都有 $g(x) > 0$，於是 $G = \ln g$ 處處有定義。對 $g(x)g(y) = g(x+y)$ 取對數，得

$$G(x) + G(y) = G(x+y),$$

這正是 $(*)$。所以 $G(x) = kx$，而

$$g(x) = e^{kx}$$

其中 k 為常數；它顯然滿足恆等式，因為 $e^{kx}e^{ky} = e^{k(x+y)}$。除了平凡解 $g \equiv 0$ 之外，這些就是全部的解。

第 (ii) 部分

每個正數 x 都可以唯一地寫成 e^u，其中 u 是實數，即 $u = \ln x$。所以我們可以寫 $x = e^u$ 和 $y = e^v$，其中 u 和 v 取遍所有實數。這時 $xy = e^{u+v}$，恆等式變成

$$H(u) + H(v) = h(e^u) + h(e^v) = h(e^{u+v}) = H(u+v)$$

對所有實數 u、v 成立。這又是 $(*)$，所以 $H(u) = ku$。由於 $u = \ln x$，

$$h(x) = k\ln x \qquad (x > 0),$$

而它滿足恆等式，因為 $\ln x + \ln y = \ln(xy)$。

第 (iii) 部分

式子 $\dfrac{x+y}{1-xy}$ 其實是喬裝了的正切加法公式（tangent addition formula）。設 $x = \tan u$ 和 $y = \tan v$，其中 $u, v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，於是 $u = \arctan x$ 及 $v = \arctan y$。那麼

$$z = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} = \tan(u+v).$$

在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上定義 $\mathrm{T}(u) = \mathrm{t}(\tan u)$。只要 $u+v$ 也落在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 之內，恆等式就給出

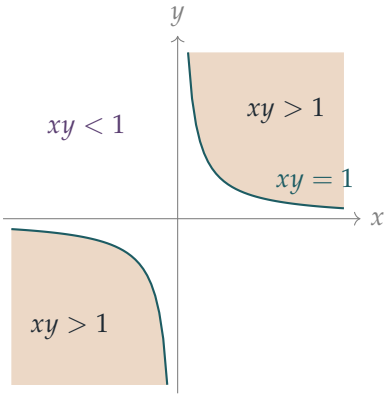
$$\mathrm{T}(u) + \mathrm{T}(v) = \mathrm{t}(x) + \mathrm{t}(y) = \mathrm{t}(\tan(u+v)) = \mathrm{T}(u+v).$$

想一想 處理 $(*)$ 的論證用到恆等式對所有 x 和 y 成立。如果我們只知道它在 u、v 和 $u+v$ 都屬於 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 時成立，論證還行得通嗎？

行得通。麥克勞林級數的論證只涉及 0 附近的情況。當 $|u| < \frac{\pi}{4}$ 時可以取 $v = u$（這時 $|2u| < \frac{\pi}{2}$），於是在 0 附近有 $2\mathrm{T}(u) = \mathrm{T}(2u)$。在 $u = 0$ 處求導 n 次，與之前完全一樣得到 $(2 - 2^n)\mathrm{T}^{(n)}(0) = 0$，所以 $\mathrm{T}(u) = ku$。由於 $u = \arctan x$，

$$\mathrm{t}(x) = k \arctan x.$$

究竟對哪些 x 和 y 這個答案才真正成立？若 $xy < 1$，則 $u + v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$。當 u 和 v 異號時，這是必然的。當兩者皆為正數時，$\tan u \tan v < 1$ 表示 $\tan v < \cot u = \tan(\frac{\pi}{2} - u)$，所以 $u + v < \frac{\pi}{2}$；兩者皆為負數的情況由對稱性同理可得。因此 $\arctan x + \arctan y = \arctan z$，恆等式成立。然而若 $xy > 1$，$u + v$ 便落在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 之外，這時 $\arctan z = u + v \mp \pi$。例如 $x = y = 2$ 給出 $z = -\frac{4}{3}$，而 $2\arctan 2 - \arctan(-\frac{4}{3}) = \pi$。



所以 $\mathrm{t}(x) = k \arctan x$ 對每一對滿足 $xy < 1$ 的數都符合恆等式，也就是圖中包含原點的區域。這就是題目想要的答案。在 $xy > 1$ 的陰影區域內，等式兩邊相差 $\pm k\pi$。如果我們堅持恆等式要對每一對滿足 $xy \neq 1$ 的數都毫無例外地成立，那就只剩下 $k = 0$，唯一的解是 $\mathrm{t} \equiv 0$。

驗算

- 對於第 (iii) 部分，把恆等式對 y 求導，然後代入 $y = 0$。由於 $\partial z/\partial y = (1+x^2)/(1-xy)^2$，在 $y = 0$ 時等於 $1 + x^2$，我們得到 $\mathrm{t}'(0) = \mathrm{t}'(x)(1 + x^2)$。所以 $\mathrm{t}'(x) = k/(1+$

$x^2)$，再配合 $\mathrm{t}(0) = 0$，積分便得 $k \arctan x$。對 $(*)$ 用同樣的技巧，立即得到 $\mathrm{f}'(x) = \mathrm{f}'(0)$。

- 我們對全部四個答案各用 10^4 對隨機數作了數值檢驗。在第 (iii) 部分，$k \arctan x$ 在約 5×10^4 對滿足 $xy < 1$ 的隨機數上全部符合恆等式，而在每一對滿足 $xy > 1$ 的數上，誤差的大小都恰好是 $k\pi$。

常見錯誤

- 忘記處理常數項：$\mathrm{f}(0) = 0$ 來自 $n = 0$ 的情況，所以答案是 kx，而不是 $kx + c$。
- 沒有檢查 $\mathrm{g} > 0$ 就取 $\ln \mathrm{g}$。零函數是第 (i) 部分名副其實的一個解。
- 以為 $\arctan x + \arctan y = \arctan \dfrac{x+y}{1-xy}$ 總是成立。它需要 $xy < 1$。

STEP 之外

即使不假設麥克勞林級數存在，柯西方程 $(*)$ 所需的條件其實少得多：只要 f 連續（continuous）（甚至只需在某個區間上有界（bounded）），仍然可以推出 $\mathrm{f}(x) = kx$，出發點是對有理數 q 有 $\mathrm{f}(q) = q\,\mathrm{f}(1)$。不過，利用選擇公理（axiom of choice），可以構造出並非線性的怪異解，它們的圖像在平面上稠密（dense）。第 (i) 部分還說明，指數函數本質上是由加法到乘法的唯一連續同態（homomorphism），這個想法在羣論（group theory）中反覆出現。想看這類連續性與稠密性論證的嚴謹處理，Abbott 的 *Understanding Analysis* 是很好的入門讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。