詳細解答

STEP III 2006，第 3 題

純數學 • 冪級數的係數

> **STEP III 2006，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q3

關鍵思路

我們完全不必反覆對 $\tan x$ 求導。每一條三角恆等式（trigonometric identity）都把其中兩個函數連繫起來，因而化為它們的係數（coefficient）之間的一條關係式。只要比較 x^n 的係數，三個級數就全由 b_n 這一個數列決定。接着，畢氏恆等式（Pythagorean identity）$\cot^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x$ 給出 b_n 必須滿足的方程，我們可以逐個解出。

解答

第 (i) 部分

若一個冪級數（power series）在 0 附近收斂（converge）至某函數，它就是該函數的麥克勞林級數（Maclaurin series），所以 $a_n = \tan^{(n)}(0)/n!$。而 tan 是奇函數（odd function）：$\tan(-x) = -\tan x$。對奇函數求導得到偶函數（even function），對偶函數求導則得到奇函數。因此 tan 的每個偶數階導數都是奇函數，而奇函數在 0 處的值為零。故此當 n 為偶數時 $\tan^{(n)}(0) = 0$，於是當 n 為偶數時 $a_n = 0$。換言之，這個級數只含 x 的奇數次冪。同樣的論證適用於 $\cot x - \frac{1}{x} = \sum b_n x^n$，它也是奇函數，所以當 n 為偶數時 $b_n = 0$。我們稍後亦會從下面的關係式得出這個結論。

至於恆等式，把各項通分，以 $\sin x \cos x$ 為分母：

$$\cot x - \tan x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\cot 2x.$$

現在取 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$，使 $2x$ 同樣落在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 之內，於是可以使用 $\cot 2x$ 的級數，即以

$2x$ 代替 x：

$$2\cot 2x = 2\left(\frac{1}{2x} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n 2^n x^n\right) = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} b_n x^n.$$

恆等式的左方是

$$\cot x - \tan x = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n) x^n.$$

兩邊的 $\frac{1}{x}$ 項互相抵消，餘下兩個冪級數，它們對 $(0, \frac{1}{4}\pi)$ 內的每個 x 都相等。

想一想 為甚麼我們可以比較兩個無窮級數的係數？

若兩個冪級數在整個區間上有相同的和，它們的係數便一一相等。把兩者相減：所得的差是一個在整個區間上恆等於零的冪級數。於是它的各階導數在該區間上都是零，再令 $x \to 0^+$，便知每個係數都是零。所以

$$b_n - a_n = 2^{n+1} b_n, \qquad \text{即} \qquad a_n = (1 - 2^{n+1})\, b_n,$$

這正是所要證明的。由於 $1 - 2^{n+1} \neq 0$，我們有 $b_n = a_n/(1 - 2^{n+1})$，所以每當 $a_n = 0$ 時 $b_n = 0$，也就是當 n 為偶數時。

第 (ii) 部分

同理，

$$\cot x + \tan x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\operatorname{cosec} 2x.$$

當 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$ 時，在 cosec 的級數中以 $2x$ 代替 x，得

$$2\operatorname{cosec} 2x = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} c_n x^n, \qquad \cot x + \tan x = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + a_n) x^n.$$

比較係數得 $b_n + a_n = 2^{n+1} c_n$。代入第 (i) 部分的 $a_n = (1 - 2^{n+1}) b_n$，

$$2^{n+1} c_n = (2 - 2^{n+1})\, b_n \quad \Longrightarrow \quad c_n = \frac{2 - 2^{n+1}}{2^{n+1}}\, b_n = (2^{-n} - 1)\, b_n,$$

這就是所求的結果。特別地，當 n 為偶數時同樣有 $c_n = 0$。

第 (iii) 部分

把 $\cot x$ 和 $\operatorname{cosec} x$ 的級數乘以 x，

$$1 + x \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = x \cot x, \qquad 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x \operatorname{cosec} x.$$

所以題目所述的等式就是 $x^2 \cot^2 x + x^2 = x^2 \operatorname{cosec}^2 x$。這是恆等式 $\cot^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x$ 乘以 x^2 的結果，而該恆等式則由 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ 除以 $\sin^2 x$ 得出。等式由此得證。

現在把它展開。下標為偶數的 b_n 和 c_n 都是零，所以

$$x\cot x = 1 + b_1x^2 + b_3x^4 + \cdots, \qquad x\operatorname{cosec} x = 1 + c_1x^2 + c_3x^4 + \cdots,$$

而等式變成

$$(1 + b_1x^2 + b_3x^4 + \cdots)^2 + x^2 = (1 + c_1x^2 + c_3x^4 + \cdots)^2.$$

把兩邊平方展開，

$$1 + (2b_1 + 1)x^2 + (2b_3 + b_1^2)x^4 + \cdots = 1 + 2c_1x^2 + (2c_3 + c_1^2)x^4 + \cdots.$$

由第 (ii) 部分，$c_1 = (\frac{1}{2} - 1)b_1 = -\frac{1}{2}b_1$ 及 $c_3 = (\frac{1}{8} - 1)b_3 = -\frac{7}{8}b_3$。

x^2 的係數：

$$2b_1 + 1 = 2c_1 = -b_1 \quad \Longrightarrow \quad b_1 = -\tfrac{1}{3}.$$

於是由第 (i) 部分得 $a_1 = (1 - 2^2)b_1 = (-3)(-\frac{1}{3}) = 1$，正如所求。

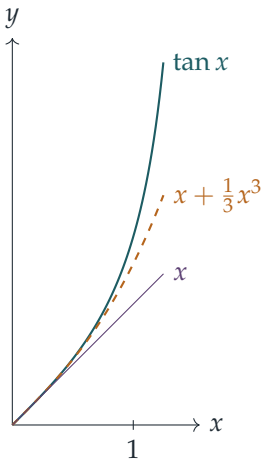
x^4 的係數：代入 $b_1 = -\frac{1}{3}$ 及 $c_1 = \frac{1}{6}$，

$$2b_3 + \tfrac{1}{9} = -\tfrac{7}{4}b_3 + \tfrac{1}{36} \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{15}{4}\,b_3 = -\tfrac{3}{36} = -\tfrac{1}{12} \quad \Longrightarrow \quad b_3 = -\tfrac{1}{45}.$$

因此

$$a_3 = (1 - 2^4)\,b_3 = (-15)\left(-\tfrac{1}{45}\right) = \tfrac{1}{3}.$$

所以 $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$。



驗算

- 在 $x = 0.3$ 處，$\tan 0.3 \approx 0.309336$，而 $0.3 + \frac{1}{3}(0.3)^3 = 0.309$。兩者相差約 3×10^{-4}，正好是下一項 $\frac{2}{15}x^5$ 的大小。

- $b_1 = -\frac{1}{3}$ 這個值與熟悉的 $\cot x \approx \frac{1}{x} - \frac{x}{3}$ 吻合。此外 $c_1 = \frac{1}{6}$ 與 $\operatorname{cosec} x \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{6}$ 吻合，後者可由 $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ 得出。
- 我們把 sin 和 cos 的級數相除，以有理數運算精確地驗證了三條關係式對 48 以內的每個 n 都成立。我們亦驗證了在 $(0,1)$ 內隨機選取的點上，部分和（partial sum）與 tan、cot 和 cosec 的值相符。

常見錯誤

- 比較係數時忘記了 $\frac{1}{x}$ 項。這些項確實會抵消，但全靠 $2\cot 2x$ 和 $2\operatorname{cosec} 2x$ 中的因子 2。
- 在第 (iii) 部分展開平方時，忘記了 $b_0 = b_2 = 0$。若保留 b_0，便會多出本不存在的 x 的奇數次冪，你還得另行證明它們的係數為零。
- 計算 $c_3 = -\frac{7}{8}b_3$ 時弄錯正負號或 2 的冪次。留意 $2^{-3} - 1 = -\frac{7}{8}$。

STEP 之外

把這個方法推演到更高階，就會發現這些係數原來是伯努利數（Bernoulli numbers）B_{2k}：$x\cot x = \sum_k (-1)^k 2^{2k} B_{2k}\, x^{2k}/(2k)!$。第 (i) 部分的因子 $1 - 2^{n+1}$ 隨即給出 $\tan x$ 各係數的一般公式。為甚麼 $\tan x$ 的級數到了 $|x| = \frac{1}{2}\pi$ 就不再收斂？複分析（complex analysis）回答了這個問題：冪級數的收斂範圍一直延伸到函數趨向無窮的最近一點，對 tan 而言，就是位於 $\pm\frac{1}{2}\pi$ 的極點（pole）。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 對此有精彩的解說，而 Abbott 的 *Understanding Analysis* 則為冪級數的逐項比較提供了嚴格的論證。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。