詳細解答

# STEP III 2006，第 2 題

純數學 • 利用對稱性求定積分

**STEP III 2006，第 2 題**

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/06-s3-q2

## 關鍵思路

區間 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ 是對稱的，所以把 $\theta$ 換成 $-\theta$ 便得到 $I$ 的第二個表達式；兩式相加，分母中那個礙事的 $\sin\theta$ 就會消失。一旦把所有式子都用 $\tan\theta$ 表示，積分（integral）$I$ 和 $J$ 便有相同的分母，而兩者經適當選取的組合，其被積函數（integrand）恰好是 1。整個過程中，要時刻留意 $\cos 2\alpha$ 的正負號：最後一部分的變化正在於此。

## 解答

設 $s = \sin 2\alpha$ 及 $c = \cos 2\alpha$，則 $s^2 + c^2 = 1$。在所考慮的兩個 $\alpha$ 範圍內（$\alpha \neq \frac{1}{4}\pi$），都有 $0 < s < 1$，所以 $1 \mp s\sin\theta \geq 1 - s > 0$：$I$ 的被積函數在整個區間上連續（continuous）。

### 第 (i) 部分

作代換（substitution）$\theta = -\phi$，則 $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$，而上下限互換。由於 $\cos^2(-\phi) = \cos^2\phi$ 及 $\sin(-\phi) = -\sin\phi$，

$$I = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\phi}{1 + \sin\phi\, s}\,(-\mathrm{d}\phi) = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\phi}{1 + s\sin\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

這就是第一個結果（把 $\phi$ 改寫為 $\theta$ 即可）。

把 $I$ 的兩個表達式相加，

$$2I = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2\theta \left(\frac{1}{1 - s\sin\theta} + \frac{1}{1 + s\sin\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2\cos^2\theta}{1 - s^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

現在把分子和分母同時除以 $\cos^2\theta$（在區間內部不為零）：

$$\frac{2\cos^2\theta}{1-s^2\sin^2\theta}=\frac{2}{\sec^2\theta-s^2\tan^2\theta}=\frac{2}{1+\tan^2\theta\,(1-s^2)}=\frac{2}{1+c^2\tan^2\theta},$$

其中用到 $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$ 及 $1-\sin^2 2\alpha=\cos^2 2\alpha$。因此

$$2I=\int_{-\frac12\pi}^{\frac12\pi}\frac{2}{1+\tan^2\theta\cos^2 2\alpha}\,\mathrm{d}\theta,$$

正如所求。（在 $\theta=\pm\frac12\pi$ 處，這個被積函數趨向 0，所以在兩個端點不會出問題。）

**第 (ii) 部分**

分子中的 $\sec^2\theta$ 提示我們採用 $t=\tan\theta$，$\mathrm{d}t=\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$。當 $\theta$ 由 $-\frac12\pi$ 變到 $\frac12\pi$ 時，$t$ 走遍整條實數線：

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+c^2t^2}.$$

由於 $0<\alpha<\frac14\pi$，我們有 $0<2\alpha<\frac12\pi$，所以 $c>0$。設 $u=ct$，

$$J=\frac1c\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\frac1c\Big[\arctan u\Big]_{-\infty}^{\infty}=\frac{\pi}{c}=\pi\sec 2\alpha.$$

**第 (iii) 部分**

由第 (i) 部分，$I=\displaystyle\int_{-\frac12\pi}^{\frac12\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+c^2\tan^2\theta}$，它與 $J$ 有相同的分母。所以

$$s^2I+c^2J=\int_{-\frac12\pi}^{\frac12\pi}\frac{s^2+c^2\sec^2\theta}{1+c^2\tan^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

? **想一想** 為甚麼偏偏這個組合會比較容易處理？

看看分子：$s^2+c^2\sec^2\theta=s^2+c^2+c^2\tan^2\theta=1+c^2\tan^2\theta$。它恰好就是分母，所以被積函數是 1，而

$$s^2I+c^2J=\pi.$$

利用第 (ii) 部分的 $J=\pi/c$，

$$s^2I=\pi-\pi c=\pi(1-c)\quad\Longrightarrow\quad I=\frac{\pi(1-c)}{1-c^2}=\frac{\pi}{1+c},$$

其中用到 $s^2=1-c^2=(1-c)(1+c)$，並約去了 $1-c\neq0$（因為 $c<1$）。最後，$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$，所以

$$I=\frac{\pi}{2\cos^2\alpha}=\tfrac12\pi\sec^2\alpha.\qquad\checkmark$$

### 第 (iv) 部分

現在 $\frac{1}{4}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$，所以 $\frac{1}{2}\pi < 2\alpha < \pi$：仍然有 $0 < s < 1$，但這次 $c < 0$。第 (i) 部分只用到 $s^2 + c^2 = 1$，所以依然成立；第 (iii) 部分的恆等式（identity）$s^2 I + c^2 J = \pi$ 亦然。唯一改變的是第 (ii) 部分。

> **想一想** 第 (ii) 部分究竟在哪裏用到了 $\alpha < \frac{1}{4}\pi$？

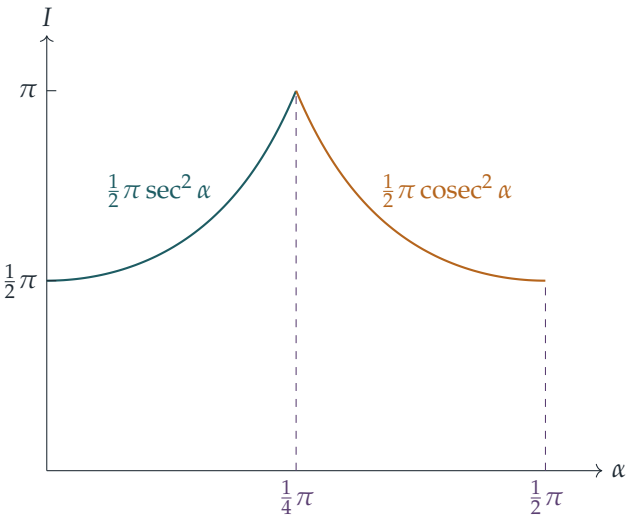
就在代換 $u = ct$ 之中：若 $c < 0$，$u$ 的上下限會變成由 $+\infty$ 到 $-\infty$，把它們換回來便多出一個負號。換句話說，$J = \pi/|c| = -\pi/c$。（這是必然的：$J$ 是一個正函數的積分，所以不可能等於負數 $\pi \sec 2\alpha$。）於是

$$s^2 I = \pi - c^2\Big(-\frac{\pi}{c}\Big) = \pi(1+c) \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{\pi(1+c)}{(1-c)(1+c)} = \frac{\pi}{1-c},$$

其中約去了 $1 + c \neq 0$（因為 $c > -1$）。由於 $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$，

$$I = \frac{\pi}{2\sin^2\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{cosec}^2\alpha \qquad \big(\tfrac{1}{4}\pi < \alpha < \tfrac{1}{2}\pi\big).$$

有一個快捷的方法可以核實：$I$ 只透過 $\sin 2\alpha$ 依賴於 $\alpha$，而 $\sin 2(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \sin 2\alpha$。所以 $I(\alpha) = I(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \frac{1}{2}\pi \sec^2(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \frac{1}{2}\pi \operatorname{cosec}^2\alpha$。$I$ 的圖像關於 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ 對稱，而兩條公式在該處都給出 $\pi$：




## 驗算

- 在 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$（$c = 0$）時，第 (i) 部分的 2I 形式的被積函數是 2，得出 $I = \pi$，與兩條公式都吻合。

- 當 $\alpha \to 0$ 時，$I \to \int \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\pi$，與 $\frac{1}{2}\pi \sec^2 0$ 吻合。
- 數值計算方面（對原來的積分使用辛普森法則（Simpson's rule）），$\alpha = 0.5$ 給出 $I \approx 2.039595$，等於 $\frac{1}{2}\pi \sec^2 0.5$；而 $\alpha = 1.1$ 給出 $I \approx 1.977709 = \frac{1}{2}\pi \operatorname{cosec}^2 1.1$。在所有測試過的情況中，$s^2 I + c^2 J$ 的結果都是 3.141593。

## 常見錯誤

- 在第 (iv) 部分仍然寫 $J = \pi \sec 2\alpha$：這個值在該範圍內是負數，而正函數的積分不可能是負數。
- 忘記了代換 $t = \tan\theta$ 會把有限區間變成整條實數線，所以上下限變成 $\pm\infty$。

## STEP 之外

第 (i) 部分的技巧，即取 $f(\theta)$ 與 $f(-\theta)$ 的平均，正是把函數分解為偶部和奇部（even and odd parts）的起點：在對稱區間上積分，只有偶部會留下來。$\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的有理函數（rational function）在一個完整週期上的積分，是大學第一門複分析（complex analysis）課程中圍道積分（contour integration，即留數定理 the residue theorem）的經典應用，像本題這樣的結果在那裏寥寥數行便可得出；參閱 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可視化複分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。