詳細解答

STEP III 2006，第 14 題

概率與統計 • 協方差與獨立性

> **STEP III 2006，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q14

關鍵思路

這裏的一切都建基於兩個事實：期望值（expectation）是線性的；而對於獨立（independent)的變量，乘積的期望值等於期望值的乘積。方差(variance)可由 $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - [\mathrm{E}(Y)]^2$ 求得，所以我們自始至終只需要計算期望值。要證明兩個變量並非獨立，只須找出獨立性的一個推論不成立便已足夠，而最容易檢驗的就是 $\mathrm{E}(UV) = \mathrm{E}(U)\,\mathrm{E}(V)$。

解答

兩個事實

對於任意隨機變量（random variable）及常數 a、b，

$$\mathrm{E}(aX_1 + bX_2) = a\,\mathrm{E}(X_1) + b\,\mathrm{E}(X_2),$$

而若 X_1 與 X_2 獨立，則

$$\mathrm{E}(X_1X_2) = \mathrm{E}(X_1)\,\mathrm{E}(X_2).$$

第二個事實同樣適用於這些變量的函數：若 X_1、X_2 獨立，則 X_1^2 與 X_2、X_1 與 X_2^2，以及 X_1^2 與 X_2^2 亦各自獨立。我們還會用到 $\mathrm{E}(X_i^2) = \sigma_i^2 + \mu_i^2$，這不過是把 $\mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{E}(X_i^2) - \mu_i^2$ 移項而已。

周界與面積

周界為 $P = 2X_1 + 2X_2$，面積為 $A = X_1X_2$。由線性及獨立性，

$$\mathrm{E}(P) = 2(\mu_1 + \mu_2), \qquad \mathrm{E}(A) = \mu_1\mu_2.$$

要求 P 的方差，我們從 $\mathrm{E}(P^2)$ 入手：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(P^2) &= 4\,\mathrm{E}(X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2)\\ &= 4(\sigma_1^2 + \mu_1^2 + 2\mu_1\mu_2 + \sigma_2^2 + \mu_2^2)\\ &= 4(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + 4(\mu_1 + \mu_2)^2,\end{aligned}$$

其中用到線性及 $\mathrm{E}(X_1X_2) = \mu_1\mu_2$。減去 $[\mathrm{E}(P)]^2 = 4(\mu_1 + \mu_2)^2$，得

$$\mathrm{Var}(P) = 4(\sigma_1^2 + \sigma_2^2), \qquad \text{所以}P\text{ 的標準差（standard deviation）為}2\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

至於 A，由於 X_1^2 與 X_2^2 獨立，

$$\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{E}(X_1^2)\,\mathrm{E}(X_2^2) = (\sigma_1^2 + \mu_1^2)(\sigma_2^2 + \mu_2^2),$$

減去 $\mu_1^2\mu_2^2$ 後餘下

$$\mathrm{Var}(A) = \sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2,$$

所以 A 的標準差為

$$\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2}.$$

P 與 A 並非獨立

假如 P 與 A 獨立，便會有 $\mathrm{E}(PA) = \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A)$。現在 $PA = 2X_1^2X_2 + 2X_1X_2^2$，所以由線性以及 X_1 與 X_2 的獨立性，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(PA) &= 2(\sigma_1^2 + \mu_1^2)\mu_2 + 2\mu_1(\sigma_2^2 + \mu_2^2)\\ &= 2(\mu_1 + \mu_2)\mu_1\mu_2 + 2(\mu_2\sigma_1^2 + \mu_1\sigma_2^2)\\ &= \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A) + 2(\mu_2\sigma_1^2 + \mu_1\sigma_2^2).\end{aligned}$$

長度和闊度都是正數，所以 $\mu_1, \mu_2 > 0$，而且 $\sigma_1, \sigma_2 \neq 0$，因此多出來的一項 $2(\mu_2\sigma_1^2 + \mu_1\sigma_2^2)$ 嚴格為正。故此 $\mathrm{E}(PA) \neq \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A)$，即 P 與 A 並非獨立。

變量 $Z = P - \alpha A$

同樣地，若 Z 與 A 獨立，則必有 $\mathrm{E}(ZA) = \mathrm{E}(Z)\,\mathrm{E}(A)$。由線性，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(ZA) - \mathrm{E}(Z)\,\mathrm{E}(A) &= [\mathrm{E}(PA) - \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A)] - \alpha[\mathrm{E}(A^2) - [\mathrm{E}(A)]^2]\\ &= 2(\mu_2\sigma_1^2 + \mu_1\sigma_2^2) - \alpha(\mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2),\end{aligned}$$

其中用到上面的兩個結果。與 α 相乘的括號就是 $\mathrm{Var}(A)$，它是正數（當中含有 $\sigma_1^2\sigma_2^2 > 0$），所以這個式子恰好只在 α 的一個值處等於零：

$$\alpha_0 = \frac{2(\mu_1\sigma_2^2 + \mu_2\sigma_1^2)}{\mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2}.$$

若 $\alpha \neq \alpha_0$，則 $\mathrm{E}(ZA) \neq \mathrm{E}(Z)\,\mathrm{E}(A)$，所以 Z 與 A 並非獨立，這正是所要證明的。

想一想 $\alpha = \alpha_0$ 是否表示 Z 與 A 確實獨立？

不是。協方差（covariance）為零是獨立性的推論，卻不能保證獨立。當 $\alpha = \alpha_0$ 時，我們的檢驗根本提供不了任何資訊，必須另覓論證。最後一部分說明，在一個具體例子中，獨立性在該處同樣不成立。

最後一部分

這裏 $\mu_1 = \mu_2 = 2$ 而 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$，所以

$$\alpha_0 = \frac{2(2+2)}{4+4+1} = \frac{8}{9}.$$

由上一部分，對任何 $\alpha \neq \frac{8}{9}$，Z 與 A 都並非獨立。若要用一個論證涵蓋所有 α，可列出四個等可能的結果：

(X_1, X_2)	A	P	$Z = P - \alpha A$
$(1,1)$	1	4	$4-\alpha$
$(1,3),(3,1)$	3	8	$8-3\alpha$
$(3,3)$	9	12	$12-9\alpha$

關鍵的觀察是：P 完全由 A 決定，因而 Z 也是如此。設 $z = 4-\alpha$。知道 $A = 1$ 便必有 $Z = z$，所以

$$\mathrm{P}(Z = z,\ A = 1) = \mathrm{P}(A = 1) = \tfrac{1}{4}.$$

若要獨立，這個概率便須等於 $\mathrm{P}(Z = z)\,\mathrm{P}(A = 1)$，即 $\mathrm{P}(Z = z) = 1$，於是 Z 在每一個結果上都要取值 $4-\alpha$。這需要 $8-3\alpha = 4-\alpha$，即 $\alpha = 2$，同時又需要 $12-9\alpha = 4-\alpha$，即 $\alpha = 1$。兩者不可能同時成立，所以 $\mathrm{P}(Z = z) < 1$，獨立性不成立。

因此，無論 α 取甚麼值，Z 與 A 都並非獨立。例如當 $\alpha = \frac{8}{9}$ 時，Z 的取值為 $\frac{28}{9}$、$\frac{16}{3}$ 和 4，而 $\mathrm{P}(Z = \frac{28}{9}, A = 1) = \frac{1}{4}$，但 $\mathrm{P}(Z = \frac{28}{9})\,\mathrm{P}(A = 1) = \frac{1}{16}$。

驗算

- 若完全沒有變異（$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$），兩個標準差都化為 0，理應如此。
- 在最後一部分，按公式得 $\mathrm{Var}(A) = 1+4+4 = 9$；直接計算，$A$ 取值 $1, 3, 9$ 的概率分別為 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$，得出 $\mathrm{E}(A) = 4$、$\mathrm{E}(A^2) = 25$，方差為 9。
- 我們以分數作精確計算，在 200 個隨機的離散分佈上驗證了平均值、方差和協方差的一般公式。我們亦確認了在 α_0 處 $\mathrm{E}(ZA) = \mathrm{E}(Z)\mathrm{E}(A)$，確認了最後一部分中 $\alpha_0 = \frac{8}{9}$，並確認了在該部分中，對於 $\alpha = \frac{8}{9}$ 及另外 500 個 α 值，Z 與 A 均不獨立。

常見錯誤

- 寫成 $\mathrm{E}(X_1^2) = \mu_1^2$。正是方差項 σ_1^2 令 $\mathrm{Var}(A)$ 和協方差不為零。
- 當 $\alpha = \alpha_0$ 時斷定 Z 與 A 獨立。協方差為零並不蘊涵獨立。
- 忘記說明為何 $\mu_2\sigma_1^2 + \mu_1\sigma_2^2 \neq 0$。正是因為長度為正數，各項才不可能互相抵銷。

STEP 之外

$\mathrm{E}(UV) - \mathrm{E}(U)\mathrm{E}(V)$ 這個量就是協方差，而特殊值 α_0 等於 $\mathrm{Cov}(P, A)/\mathrm{Var}(A)$，即 P 對 A 的最小二乘迴歸（least-squares regression）直線的斜率。取 $\alpha = \alpha_0$ 會令殘差（residual）Z 與 A 不相關（uncorrelated），但並不令兩者獨立。對於聯合正態（jointly normal）的變量，這兩個概念是一致的，這也是正態分佈如此方便的原因之一。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）對協方差、相關與獨立性有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。