詳細解答

STEP III 2006，第 13 題

概率與統計 • 幾何概率

> **STEP III 2006，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q13

關鍵思路

周界由兩段性質迥異的部分組成：一段長度為 π 的弧和一條長度為 2 的直徑，所以我們按每一點落在哪一段來取條件（condition）。在三種情況的每一種之中，三角形的面積都有簡單的公式 $\frac{1}{2}ab\sin C$，其中頂點 C 位於圓心，而各個條件期望值（conditional expectation）都只是簡短的積分。最後用全期望定律（law of total expectation）把各部分重新合併起來。

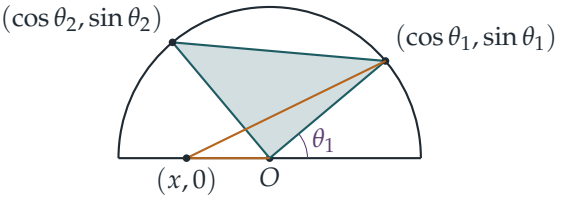
解答

設定

把直徑的中點 O 放在原點，直徑沿 x 軸由 $(-1,0)$ 伸展至 $(1,0)$，而弧則位於上半平面。「在周界上隨機選取」的意思是沿整條邊界按長度均勻分佈（uniformly distributed），邊界的總長度為 $\pi+2$。因此每一點各自獨立地

- 以概率 $\dfrac{\pi}{\pi+2}$ 落在弧上，這時它是 $(\cos\theta,\sin\theta)$，其中 θ 在 $[0,\pi]$ 上均勻分佈；
- 以概率 $\dfrac{2}{\pi+2}$ 落在直徑上，這時它是 $(x,0)$，其中 x 在 $[-1,1]$ 上均勻分佈。

（在弧上按長度均勻分佈，等同於按角度均勻分佈，因為單位圓上的弧長等於所對的角。）



設 D 為兩點之中落在直徑上的點的數目。那麼 $D = 2$、1、0 的概率分別為

$$\frac{4}{(\pi+2)^2}, \qquad \frac{2\cdot 2\pi}{(\pi+2)^2} = \frac{4\pi}{(\pi+2)^2}, \qquad \frac{\pi^2}{(\pi+2)^2},$$

這裏用到兩點互相獨立（independent）　（中間一種情況的因子 2 是計算哪一點落在直徑上）　。在每一種情況下，三角形都有一個頂點在 O，所以它的面積是 $\frac{1}{2}\,|OP|\,|OQ|\sin\angle POQ$。

兩點都在直徑上

三個頂點全在同一直線上，所以三角形是退化（degenerate）的，$A = 0$。因此 $\mathrm{E}(A \mid D = 2) = 0$。

一點在弧上，一點在直徑上

設這兩點為 $P = (\cos\theta, \sin\theta)$ 和 $R = (x, 0)$。那麼 $|OP| = 1$，$|OR| = |x|$，而底邊 OR 沿着直徑，P 則在它上方高度 $\sin\theta \geq 0$ 之處，所以

$$A = \tfrac{1}{2}\,|x|\sin\theta.$$

由於 x 與 θ 互相獨立，

$$\mathrm{E}(A \mid D = 1) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}|x|\,\mathrm{E}(\sin\theta) = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|x|\,\mathrm{d}x\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2\pi}.$$

兩點都在弧上

現在 $P = (\cos\theta_1, \sin\theta_1)$ 和 $Q = (\cos\theta_2, \sin\theta_2)$，其中 θ_1, θ_2 互相獨立，並在 $[0, \pi]$ 上均勻分佈。兩條半徑的長度都是 1，而角 POQ 等於 $|\theta_1 - \theta_2|$，所以

$$A = \tfrac{1}{2}\,|\sin(\theta_1 - \theta_2)|.$$

? **想一想**　要求出 $\mathrm{E}|\sin(\theta_1 - \theta_2)|$，我們是否需要知道 $\theta_1 - \theta_2$ 的分佈？

不需要：先對 θ_2 取條件。對於固定的 θ_2，當 θ_1 走遍 $[0, \pi]$ 時，角 $\theta_1 - \theta_2$ 走遍一個長度為 π 的區間。函數 $|\sin u|$ 的週期（period）為 π，所以它在任何長度為 π 的區間上的積

分，都與在 $[0,\pi]$ 上的積分相同：

$$\int_0^{\pi} |\sin(\theta_1-\theta_2)|\,\mathrm{d}\theta_1 = \int_0^{\pi} \sin u\,\mathrm{d}u = 2.$$

所以無論 θ_2 是甚麼，都有 $\mathrm{E}\big(|\sin(\theta_1-\theta_2)| \;\big|\; \theta_2\big) = 2/\pi$，因此

$$\mathrm{E}(A \mid D=0) = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

合併結果

根據全期望定律，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(A) &= \frac{4}{(\pi+2)^2}\cdot 0 + \frac{4\pi}{(\pi+2)^2}\cdot\frac{1}{2\pi} + \frac{\pi^2}{(\pi+2)^2}\cdot\frac{1}{\pi}\\ &= \frac{2+\pi}{(\pi+2)^2} = \frac{1}{2+\pi},\end{aligned}$$

這就是 $(2+\pi)^{-1}$，正如題目所求。

驗算

- 三種情況的概率之和 $\dfrac{4+4\pi+\pi^2}{(\pi+2)^2}$ 等於 1。
- 每個條件期望值都不超過該情況下可能出現的最大面積：$\frac{1}{\pi}\approx 0.318 \le \frac{1}{2}$（兩條半徑互相垂直）以及 $\frac{1}{2\pi}\approx 0.159 \le \frac{1}{2}$。
- 用 10^6 對點進行蒙地卡羅模擬（Monte Carlo simulation），得出 $\mathrm{E}(A)\approx 0.1943$，而 $1/(2+\pi)\approx 0.1945$；數值積分（quadrature）亦證實了條件期望值 $1/\pi$ 和 $1/(2\pi)$。

常見錯誤

- 以各 $\frac{1}{2}$ 的概率選擇每一點落在弧上或直徑上。「在周界上隨機選取」是按每一段的長度來加權的。
- 在 $\mathrm{P}(D=1)$ 中漏掉因子 2：兩點中任何一點都可以是落在直徑上的那一點。
- 寫成 $A=\frac{1}{2}\sin(\theta_1-\theta_2)$ 而漏掉絕對值（modulus），這樣由對稱性得出的期望值會是 0。

STEP 之外

這是幾何概率（geometric probability）的一個小例子，這門學問的經典例子包括蒲豐投針問題（Buffon's needle）和貝特朗悖論（Bertrand's paradox）。貝特朗悖論說明了為何「隨機」一詞必須界定清楚，正如我們以沿周界的長度作為測度（measure）那樣。這裏真正發揮作用的工具，即對一個劃分（partition）取條件然後求平均（全期望定律），是大學一年級概率論的核心內容。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）對此有很好的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。