詳細解答

STEP III 2006，第 12 題

概率與統計 • 正態近似與期望值

> **STEP III 2006，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q12

關鍵思路

多加一輛巴士，其價值只在於它平均能賺到的錢，所以公司應考慮的牌照費，最多只能是每年額外利潤的*期望值*（expected value）。在現有車隊已足以應付的日子，新增的巴士一分錢也賺不到；而它載客再多，也不會超過車上的 32 個座位。因此我們要求的，是一個「被截斷」的隨機變量（random variable）的期望值。題目的數字經過刻意挑選：在正態近似（normal approximation）之下，新舊載客量剛好落在分佈上非常整齊的位置。

解答

建立模型

考慮單獨一次抵達，設 X 為 1024 名遊客中被指示前往巴士站的人數。每名遊客前往巴士站的概率為 $\frac{1}{2}$，並假設各遊客獲得的指示彼此獨立（independent）。於是

$$X \sim \mathrm{B}(1024, \tfrac{1}{2}), \qquad \mathrm{E}(X) = 512, \qquad \mathrm{Var}(X) = 1024 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = 256.$$

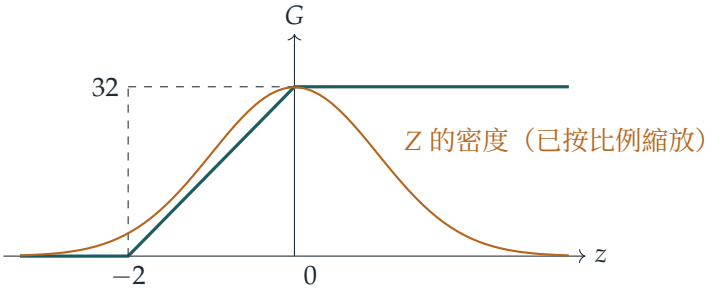
由於 n 很大而 $p = \frac{1}{2}$，我們採用正態近似 $X \approx \mathrm{N}(512, 16^2)$，並寫成 $X = 512 + 16Z$，其中 $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$。按題目指示，我們不作連續性校正（continuity correction）。

15 輛巴士可載 $15 \times 32 = 480$ 名乘客，所以現時每次抵達的利潤是 $£\min(X, 480)$。加上第 16 輛巴士後，載客量是 512，利潤是 $£\min(X, 512)$。因此每次抵達的額外利潤是

$$G = \min(X,512) - \min(X,480) = \begin{cases} 0, & X \le 480, \\ X - 480, & 480 \le X \le 512, \\ 32, & X \ge 512. \end{cases}$$

以 Z 表示，兩個分界點分別是 $X = 480 \iff Z = -2$ 和 $X = 512 \iff Z = 0$，而在中間的範圍內 $X - 480 = 32 + 16Z$。所以

$$G = \begin{cases} 0, & Z \le -2, \\ 32 + 16Z, & -2 \le Z \le 0, \\ 32, & Z \ge 0. \end{cases}$$



額外利潤的期望值

設 $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$ 為標準正態密度函數（standard normal density）。把期望值按三個範圍拆開，得

$$\mathrm{E}(G) = 32\,\mathrm{P}(Z \ge 0) + \int_{-2}^{0} (32 + 16z)\,\phi(z)\,\mathrm{d}z.$$

第一項是 $32 \times \frac{1}{2} = 16$。至於積分，常數部分給出

$$32 \int_{-2}^{0} \phi(z)\,\mathrm{d}z = 32(\Phi(0) - \Phi(-2)) = 32(\tfrac{1}{2} - (1 - \Phi(2))) = 32\Phi(2) - 16,$$

其中用到了對稱性 $\Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$。

> ? **想一想** 沒有數表，怎樣求 $z\,\phi(z)$ 的積分？

對密度函數求導：$\phi'(z) = -z\,\phi(z)$。所以 $z\,\phi(z)$ 有精確的原函數(antiderivative) $-\phi(z)$，於是

$$16 \int_{-2}^{0} z\,\phi(z)\,\mathrm{d}z = 16[-\phi(z)]_{-2}^{0} = -16(\phi(0) - \phi(2)) = -\frac{16}{\sqrt{2\pi}}(1 - e^{-2}).$$

（結果是負數，這正合道理：在整個範圍內 $z < 0$。）

把三部分相加，兩個 16 互相抵消：

$$\mathrm{E}(G) = 16 + (32\Phi(2) - 16) - \frac{16}{\sqrt{2\pi}}(1 - e^{-2}) = 32\Phi(2) - \frac{16}{\sqrt{2\pi}}(1 - e^{-2}).$$

牌照費

每年有 50 次抵達，所以根據期望值的線性性質（linearity of expectation），第 16 輛巴士每年帶來的額外利潤期望值是

$$50\,\mathrm{E}(G) = 1600\,\Phi(2) - \frac{800}{\sqrt{2\pi}}(1 - \mathrm{e}^{-2})\ \text{英鎊}.$$

若所付的牌照費高於此數，公司平均而言會虧本；而任何較低的費用都會留下期望收益。所以這就是值得考慮的最高年費（只是近似值，因為用了正態近似），亦即所求的結果。其數值約為 £1288。

驗算

- 合理範圍：新增的巴士每程賺取的金額介乎 0 與 32 之間，所以全年的數字必定介乎 0 與 1600 之間。我們的數值 $1600 \times 0.97725 - 319.15 \times 0.86466 \approx 1287.6$ 確實如此。
- 精確計算：以精確的 $\mathrm{B}(1024, \frac{1}{2})$ 概率對 $\min(k, 512) - \min(k, 480)$ 求和，再乘以 50，得 1287.69，與正態近似所得的 1287.64 相差不超過 6 便士。

常見錯誤

- 把額外利潤當作 $32\,\mathrm{P}(X > 480)$，彷彿只要用得着新巴士，它就一定滿座。其實在巴士乘客人數介乎 480 與 512 之間的日子，它只坐滿了一部分。
- 計算 $\int_{-2}^{0} z\phi(z)\,\mathrm{d}z$ 時弄錯正負號：被積函數是負的，所以答案必定是負數。

STEP 之外

$\mathrm{E}\big(\min(X, c)\big)$ 這個量，就是存貨為 c 的報販的期望銷量；而如何選擇 c 的「報販問題」（newsvendor problem），是運籌學（operations research）的經典課題。同樣的截斷收益 $\min(\max(X - a, 0), b - a)$，在金融數學中稱為「看漲期權價差」（call spread）。$\phi'(z) = -z\phi(z)$ 這個技巧，是截斷正態分佈的矩（truncated normal moments）理論的起點。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）涵蓋了二項分佈（binomial distribution）的正態近似，以及隨機變量函數的期望值。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。