詳細解答

STEP III 2006，第 11 題

力學 • 連接系統中的碰撞

> **STEP III 2006，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q11

關鍵思路

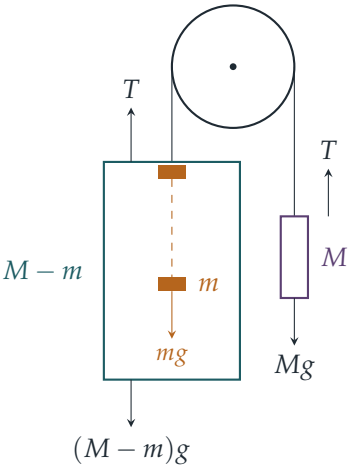
瓷磚一旦鬆脫，升降機便比平衡錘輕，於是升降機開始上升，而瓷磚則下墜：瓷磚要走過的，是相對於升降機的高度 h。至於碰撞，升降機與平衡錘可視為一個質量為 $2M - m$ 的單一物體，經地板與瓷磚相連；題目對纜索衝量所給的條件，正好讓我們為這個物體和瓷磚寫出一條動量式的守恆定律。這個「動量」在碰撞前一刻原來剛好是零，令能量的計算變得十分簡潔。

解答

我們把升降機、平衡錘和瓷磚都當作質點（particle）處理（只考慮垂直方向的運動），纜索為輕而不可伸長（light and inextensible），滑輪為光滑（smooth）。瓷磚脫落之前，系統處於靜止狀態，所以連同瓷磚的升降機與平衡錘互相平衡：升降機連瓷磚的質量為 M，不連瓷磚則為 $M - m$。

下墜

對升降機和瓷磚，取向上為正。由於纜索不可伸長，當升降機以速率 u、加速度 a 向上運動時，平衡錘便以相同的速率和加速度向下運動。設張力（tension）為 T。



對升降機（向上）和平衡錘（向下）應用牛頓第二定律（Newton's second law），得

$$(M-m)a = T-(M-m)g, \qquad Ma = Mg - T.$$

兩式相加，得 $(2M-m)a = mg$，所以

$$a = \frac{mg}{2M-m}.$$

瓷磚作自由落體運動（free fall），加速度為向下的 g（導軌光滑，亦沒有其他東西碰到它）。因此，相對於升降機，瓷磚向下的加速度為

$$g + a = g + \frac{mg}{2M-m} = \frac{2Mg}{2M-m},$$

而它相對於升降機是由靜止開始運動的。設它經過時間 t 後碰到地板，則 $\frac{1}{2}(g+a)t^2 = h$，所以

$$t^2 = \frac{(2M-m)h}{Mg}.$$

在那一刻，瓷磚的速率為

$$v = gt = \sqrt{g^2 \cdot \frac{(2M-m)h}{Mg}} = \sqrt{\frac{(2M-m)gh}{M}},$$

正如題目所求。此時升降機（和平衡錘）的速率為

$$U = at = \frac{m}{2M-m}\,gt = \frac{mv}{2M-m}.$$

在這段時間內，升降機上升了 $\frac{1}{2}at^2 = \dfrac{mh}{2M} < h$，所以題目對升降機與滑輪距離所設的條件，保證了升降機不會先碰到滑輪。

碰撞

設 J 為地板作用於瓷磚的衝量（impulse）（向上），又設 I 為纜索張力的衝量；根據題目所給的條件，這個衝量作用於升降機和作用於平衡錘的大小相同（兩者都是向上）。碰撞在瞬間完成，重力在此期間不產生衝量。設碰撞後一刻瓷磚的速度為 w（向上），升降機的速度為 U'（向上），則平衡錘向下的速度同樣是 U'。於是：

$$\begin{aligned} \text{瓷磚：}\quad & m\big(w-(-v)\big)=J,\\ \text{升降機：}\quad & (M-m)(U'-U)=I-J,\\ \text{平衡錘（向下）：}\quad & M(U'-U)=-I. \end{aligned}$$

三式相加，便消去 J 和 I：

$$mw+(2M-m)U'=-mv+(2M-m)U.$$

想一想 平衡錘的方程以「向下」為正，為甚麼可以把它與另外兩條方程相加？

因為有纜索相連，「平衡錘向下」與「升降機向上」其實是同一個坐標。我們所證明的是：$mw+(2M-m)U'$ 這個組合（瓷磚向上的動量，加上升降機與平衡錘沿纜索方向量度的動量）在碰撞前後保持不變。衝量相等這個條件正是用在這裏：沒有它，I 便不會抵消。

現在是關鍵的觀察：由於 $U=\dfrac{mv}{2M-m}$，右邊等於 $-mv+mv=0$。所以

$$mw+(2M-m)U'=0=-mv+(2M-m)U.$$

在地板處應用牛頓實驗定律（Newton's experimental law）：分離速率等於接近速率的 e 倍，即

$$w-U'=e\big(U-(-v)\big)=e(U+v).$$

碰撞前和碰撞後的速度都滿足同一條「零動量」方程，所以 (w,U') 和 $(-v,U)$ 這兩對數各自都是 $(2M-m,\,-m)$ 的倍數。恢復方程隨即決定了這個倍數：$w=ev$ 及 $U'=-eU$。（驗算：$mev-(2M-m)eU=e(mv-mv)=0$，且 $w-U'=e(v+U)$。）

能量損失

碰撞前一刻，動能（kinetic energy）為

$$\tfrac12 mv^2+\tfrac12(2M-m)U^2=\tfrac12 mv^2\left(1+\frac{m}{2M-m}\right)=\frac{Mmv^2}{2M-m}=mgh,$$

其中先用了 $U=\frac{mv}{2M-m}$，再用了 $v^2=\frac{(2M-m)gh}{M}$。碰撞後一刻，每個速度都乘上了 $\pm e$，所以動能為 $e^2\,mgh$。碰撞在瞬間完成，期間勢能（potential energy）不變，因此系統的能量損失為

$$mgh-e^2mgh=mgh(1-e^2),$$

正如題目所求。

評註

答案完全與 M 無關：它正好等於瓷磚在一部固定不動的升降機內下墜高度 h、再以恢復系數（coefficient of restitution）e 反彈時的能量損失。這是合理的。碰撞前一刻，系統的動能為 mgh，這正是所釋放的勢能（瓷磚與升降機之間的距離縮短了 h，而升降機上升的高度恰好被平衡錘下降的高度抵消）。又因為沿纜索方向的「動量」為零，這次碰撞就如同在零動量參考系（zero-momentum frame）中觀察的碰撞，而在這個參考系中，損失的動能所佔的比例永遠是 $1-e^2$。特別地，若 $e=0$，全部動能都會損失，整個系統靜止下來；若 $e=1$，則毫無損失。

驗算

- 取 $M=5$、$m=2$、$h=3$、$g=10$、$e=\frac{1}{3}$。則 $v^2=48$ 及 $U^2=3$，所以碰撞前的動能為 $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 48+\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3=60=mgh$，而損失為 $60\cdot\frac{8}{9}=\frac{160}{3}$。
- 以數值方法逐步模擬這個運動（瓷磚自由下墜，升降機以 $\frac{mg}{2M-m}$ 向上加速），隨機選取 200 組 M、m、h、e 的值，所得的碰撞速率 v、升降機速率 U 和能量損失 $mgh(1-e^2)$ 均與上述結果吻合。
- 當 $m\to 0$ 時，升降機幾乎不動，而 $v\to\sqrt{2gh}$，即自由落體的速率，與預期相符。
- 張力的衝量 $I=M(U-U')=M(1+e)U$ 為正數，所以纜索在碰撞期間保持拉緊。

常見錯誤

- 瓷磚脫落之後，仍把升降機的質量當作 M。這樣的話，甚麼都不會加速，瓷磚的速率便會是 $\sqrt{2gh}$。
- 忘記地板會上升迎向瓷磚，所以瓷磚相對於地面下墜的距離小於 h。
- 只對瓷磚和升降機應用動量守恆（conservation of momentum），忘記了經纜索與升降機相連的平衡錘。

STEP 之外

碰撞中守恆的量並不是普通的動量，而是與描述纜索位置的那個單一坐標共軛的動量：這是初嘗廣義坐標（generalised coordinates）和拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）的滋味。總動量為零的碰撞恰好損失動能的 $1-e^2$ 這個比例，這個事實正是貫穿整個碰撞理論的質心參考系（centre-of-mass frame）思想。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對質心參考系中的動量和連結體系統都有細緻的論

述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。