詳細解答

STEP III 2006，第 10 題

力學 • 角動量守恆

STEP III 2006，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/06-s3-q10

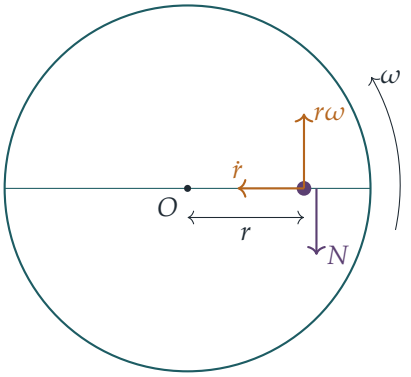
關鍵思路

沒有任何外來作用令圓盤與質點組成的系統繞軸轉動，而光滑凹槽所作的淨功為零，所以有兩條守恆定律：繞軸的角動量（angular momentum）守恆和動能（kinetic energy）守恆。由此可得 ω 和 $\dot{r}$ 均為只含 r 的函數，而那個把 V、Ω、a 和 k 連繫起來、看似古怪的條件，正是為了令能量的表達式大幅化簡。把 $\dot{r}$ 除以 $\dot{\theta} = \omega$ 便可消去時間，剩下一條描述路徑的可分離變量（separable）方程。

解答

模型

我們把質點視為質量為 m 的點質量，並把凹槽視為光滑，所以質點所受的唯一水平力是垂直於凹槽的反作用力（reaction）N。圓盤繞固定的鉛垂軸自由轉動，所以軸承對該軸不施加力矩（torque）。重力和鉛垂方向的反作用力都是鉛垂的，不起任何作用。設 θ 為圓盤已轉過的角度，故 $\omega = \dot{\theta}$，並設 r 為質點與軸的距離。由於質點一直留在凹槽內，它的速度有一個沿凹槽的分量 $\dot{r}$ 和一個垂直於凹槽的分量 $r\omega$。



角速率

反作用力 N 作用於質點，而 $-N$ 則作用於圓盤上的同一點，所以兩者繞軸的力矩互相抵銷。既然沒有繞軸的外力矩，繞軸的總角動量便是常數。圓盤的貢獻是 $mk^2\omega$，質點的貢獻是 $mr\cdot r\omega = mr^2\omega$（只有其速度的橫向分量才有矩）。在 $t=0$ 時，總角動量為 $m(k^2+a^2)\Omega$，所以

$$(k^2+r^2)\,\omega = (k^2+a^2)\,\Omega, \qquad \text{即} \qquad \omega = \frac{\Omega(k^2+a^2)}{k^2+r^2},$$

這就是第一個結果。

徑向速率

> **想一想** 質點運動時，凹槽從側面推着它。為甚麼能量仍然守恆？

反作用力 N 垂直於凹槽。質點與圓盤上跟它接觸的那一點，在垂直於凹槽方向上的速度分量相同，都是 $r\omega$；兩者的差別只在於沿凹槽的滑動速度 $\dot r$，而這個速度垂直於 N。所以 N 對質點所作的功，恰好被 $-N$ 對圓盤所作的功抵銷。軸上的軸承不作功，所以總動能是常數。

約去公因子 $\frac{1}{2}m$ 後，能量守恆給出

$$k^2\omega^2 + \dot r^2 + r^2\omega^2 = k^2\Omega^2 + V^2 + a^2\Omega^2.$$

現在把題目所給的條件 $V^2 = \Omega^2a^2(k^2+a^2)/k^2$ 用於右邊：

$$(k^2+a^2)\Omega^2 + \frac{\Omega^2a^2(k^2+a^2)}{k^2} = \frac{\Omega^2(k^2+a^2)(k^2+a^2)}{k^2} = \frac{\Omega^2(k^2+a^2)^2}{k^2}.$$

至於左邊，由第一個結果可得 $(k^2+r^2)\omega^2 = \Omega^2(k^2+a^2)^2/(k^2+r^2)$。因此

$$\begin{aligned}\dot{r}^2 &= \Omega^2(k^2+a^2)^2\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2+r^2}\right)\\ &= \frac{\Omega^2 r^2(k^2+a^2)^2}{k^2(k^2+r^2)},\end{aligned}$$

正是所求。

路徑的方程

質點向軸運動時，$\dot{r}<0$，所以取負平方根，

$$\dot{r} = -\frac{\Omega r(k^2+a^2)}{k\sqrt{k^2+r^2}}.$$

由於 $\omega = \dot{\theta} > 0$，我們可以使用鏈式法則（chain rule），$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \dot{r}\Big/\dot{\theta} = \dot{r}/\omega$：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{\Omega r(k^2+a^2)}{k\sqrt{k^2+r^2}}\cdot\frac{k^2+r^2}{\Omega(k^2+a^2)} = -\frac{r\sqrt{k^2+r^2}}{k},$$

所以 $k\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -r(k^2+r^2)^{1/2}$，正是所求。

求解 r

設 $u = k/r$，故 $u>0$。於是

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{k}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{k}{r^2}\cdot\frac{r\sqrt{k^2+r^2}}{k} = \sqrt{\frac{k^2}{r^2}+1} = \sqrt{1+u^2}.$$

這條方程可分離變量：

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \int\mathrm{d}\theta \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{arsinh}u = \theta+\alpha$$

其中 α 為某個常數。所以 $k/r = \sinh(\theta+\alpha)$，即

$$r\sinh(\theta+\alpha) = k.$$

在 $t=0$ 時，$\theta=0$ 而 $r=a$，所以 $\sinh\alpha = k/a$，正是所求。

質點永遠不會到達軸

想一想 $r = k/\sinh(\theta+\alpha)$ 永不為零，但 θ 會否在有限時間內變成無窮大？

不會。由於 $r^2 \geq 0$，第一個結果給出 $\omega \leq \Omega(k^2+a^2)/k^2$，所以 $\theta \leq \Omega(k^2+a^2)t/k^2$ 在每一個有限的時刻 t 都是有限的。於是在任何時刻都有 $r = k/\sinh(\theta+\alpha) > 0$。

我們還應檢查這些公式是否一直成立，即質點是否一直向軸運動。根據 $\dot{r}^2$ 的公式，$\dot{r}$ 只有在 $r = 0$ 時才可能等於零。所以只要 $r > 0$，$\dot{r}$ 便保持最初的負號，而上述論證對所有 $t > 0$ 都適用。質點沿螺旋線不斷向軸靠近，只有當 $\theta \to \infty$ 時才有 $r \to 0$，但它永遠不會到達軸。

驗算

- 在 $r = a$ 時，$\dot{r}^2$ 的公式給出 $\Omega^2 a^2(k^2+a^2)/k^2 = V^2$，與初始條件吻合。
- 取 $k = a = \Omega = 1$（故 $V = \sqrt{2}$），我們以數值方法對運動方程 $\ddot{r} = r\omega^2$ 和 $(k^2+r^2)\omega =$ 常數作積分。當圓盤轉過 $\theta \approx 4.4170$ 後，質點到達 $r = 0.01$，而 $\operatorname{arsinh} 100 - \operatorname{arsinh} 1 \approx 5.2983 - 0.8814 = 4.4169$ 與此相符。在整個計算過程中，能量、$\dot{r}^2$ 和 $r\sinh(\theta+\alpha) = k$ 全都成立，誤差約為 10^{-11}。

常見錯誤

- 忘記質點本身的角動量 $mr^2\omega$，或它的橫向動能 $\frac{1}{2}mr^2\omega^2$。
- 對 $\dot{r}$ 取正平方根，令 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ 的正負號出錯。
- 單憑 $r \neq 0$ 便斷定「永遠不會到達軸」，而沒有指出 θ 在有限時間內保持有限。

STEP 之外

質點不受任何徑向力，但在圓盤的旋轉參考系（rotating frame）中，它卻似乎被向外推。這就是 $\ddot{r} = r\omega^2$ 中的離心（centrifugal）項，而側向的反作用力 N 則與科里奧利力（Coriolis force）平衡。大學力學會用拉格朗日（Lagrange）方法處理這類問題：角度 θ 不出現在能量之中，所以它的共軛動量（conjugate momentum），在這裏即角動量，便自動守恆。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）以恰當的程度講解旋轉參考系和角動量。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。