詳細解答

STEP III 2006，第 1 題

純數學 • 曲線描繪

> **STEP III 2006，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q1

關鍵思路

先做除法：把曲線寫成一條直線加上一個細小的修正項，便可得出斜漸近線（oblique asymptote），知道曲線位於漸近線的哪一側，而且求導數（derivative）也變得容易。結果導數處處大於 2，而單憑這一個事實，便足以完成數根部分的大半工作：每條方程都可以改寫成「曲線 = 某個簡單的式子」，然後比較斜率。

解答

曲線

由於 $2x^3 - 10x = 2x(x^2 - 4) - 2x$，

$$y = \frac{2x(x^2-5)}{x^2-4} = 2x - \frac{2x}{x^2-4}.$$

有些特徵可以即時看出：

- y 是奇函數（odd function），所以曲線關於原點有 2 重旋轉對稱（rotational symmetry）。
- 曲線在 $x = 0$ 和 $x = \pm\sqrt{5}$ 處與 x 軸相交。
- **漸近線**。分母在 $x = \pm 2$ 處為零（該處分子為 $\pm 4 \cdot (-1) \cdot 2 \neq 0$），所以 $x = 2$ 和 $x = -2$ 是鉛垂漸近線（vertical asymptote）。當 $|x| \to \infty$ 時，修正項 $2x/(x^2-4) \to 0$，所以 $y = 2x$ 是斜漸近線。
- **在漸近線的哪一側**。$y - 2x = -2x/(x^2-4)$。當 $x > 2$ 時，此式為負（曲線略低於 $y = 2x$）；當 $x < -2$ 時為正（略高於它）。當 $0 < x < 2$ 時為正，當 $-2 < x < 0$ 時

為負。

- **在 $x = \pm 2$ 附近的表現**。當 $x \to 2^+$ 時，$-2x/(x^2-4) \to -\infty$，而當 $x \to 2^-$ 時它趨向 $+\infty$；由奇函數的性質，當 $x \to -2^-$ 時 $y \to +\infty$，當 $x \to -2^+$ 時 $y \to -\infty$。

對除法後的形式求導，

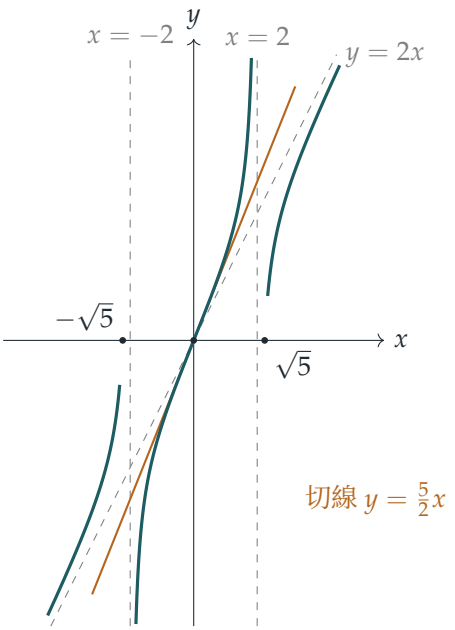
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2 - \frac{2(x^2-4) - 2x \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = 2 + \frac{2(x^2+4)}{(x^2-4)^2}.$$

所以對任何 $x \neq \pm 2$ 都有 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x > 2$：曲線沒有駐點（stationary point），而且在 $x < -2$、$-2 < x < 2$、$x > 2$ 這三個區間的每一個上，曲線都嚴格遞增（strictly increasing），由 $-\infty$ 升至 $+\infty$。

原點處的切線（tangent）。在 $x = 0$ 處斜率為 $2 + 8/16 = \frac{5}{2}$，所以切線是 $y = \frac{5}{2}x$。再求導一次，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{4x(x^2+12)}{(x^2-4)^3},$$

它只在 $x = 0$ 處為零，並且在該處變號：原點是拐點（point of inflection）。在 $0 < x < 2$ 上二階導數（second derivative）為正（分子和分母皆為負），所以中間的分支在該處是凸（convex）的，位於其切線 $y = \frac{5}{2}x$ 的上方；在 $-2 < x < 0$ 上它是凹（concave）的，位於切線的下方。



小結。漸近線為 $x = 2$、$x = -2$ 和 $y = 2x$；原點處的切線為 $y = \frac{5}{2}x$。

在以下每一部分中，$x = \pm 2$ 都不會是根（該處左方不為零而右方為零），所以我們可以除以 $x^2 - 4$，然後數算曲線與另一個圖像的交點。

第 (i) 部分

除以 $\frac{3}{2}(x^2-4)$，方程變成

$$\frac{2x(x^2-5)}{x^2-4} = \frac{2}{3}(x+3),$$

所以我們要找曲線與直線 $y = \frac{2}{3}x + 2$ 的交點，該直線的斜率為 $\frac{2}{3}$。

> **想一想** 為甚麼斜率小於 2 的直線與每個分支都恰好相交一次？

設 $h(x)$ 為曲線的 y 值減去直線的對應值。在每個分支上 $h'(x) > 2 - \frac{2}{3} > 0$，所以 h 嚴格遞增，最多只有一個零點。在靠近鉛垂漸近線的兩端，$h \to \pm\infty$，與 y 的情況一樣（直線保持有限）。在外側的兩端，$h \approx 2x - \frac{2}{3}x = \frac{4}{3}x$，當 $x \to -\infty$ 時趨向 $-\infty$，當 $x \to +\infty$ 時趨向 $+\infty$。所以在三個分支的每一個上，h 都由 $-\infty$ 走到 $+\infty$，根據中間值定理（intermediate value theorem），它恰好有一個零點。

因此方程 (i) 有三個實根。（事實上它就是三次方程 $2x^3 - 3x^2 - 11x + 12 = 0$，其中一個根是 $x = 1$。）

第 (ii) 部分

除以 $2(x^2-4)$，我們需要找曲線與 $y = \frac{5}{2}x - 1$ 的交點：這是把原點處的切線向下平移 1。它的斜率現在大於 2，所以 (i) 的論證不再適用，我們要逐個分支考察。

- $x > 2$：曲線位於 $y = 2x$ 的下方，而直線滿足 $\frac{5}{2}x - 1 - 2x = \frac{1}{2}x - 1 > 0$，所以它位於 $y = 2x$ 的上方。沒有交點。
- $x < -2$：曲線位於 $y = 2x$ 的上方，而由於 $\frac{1}{2}x - 1 < 0$，直線位於其下方。沒有交點。
- $0 \le x < 2$：曲線位於其切線 $y = \frac{5}{2}x$ 之上或恰在其上（凸性），而切線又在直線的上方。沒有交點。
- $-2 < x < 0$：當 $x \to -2^+$ 時，曲線趨向 $-\infty$，而直線趨向 -6；在 $x = 0$ 處曲線的值為 0，高於直線的 -1。所以至少有一個交點。因為這裏 $y'' < 0$，y' 在 $(-2, 0)$ 上遞減，所以 $y' > y'(0) = \frac{5}{2}$；「曲線減直線」這個差嚴格遞增，故交點唯一。

因此方程 (ii) 恰好有一個實根，位於 -2 與 0 之間。（寫成三次方程就是 $x^3 - 2x^2 + 8 = 0$，它的駐點值 8 和 $\frac{184}{27}$ 都是正數，由此確認只有一個實根，約在 $x \approx -1.51$ 附近。）

第 (iii) 部分

除以 $(x^2-4)^2$ 得

$$\left(\frac{2x(x^2-5)}{x^2-4}\right)^2 = x^2+1,$$

所以我們需要找曲線與等軸雙曲線（rectangular hyperbola）$y^2-x^2=1$ 的交點，即與 $y=\sqrt{x^2+1}$（上支）或 $y=-\sqrt{x^2+1}$（下支）的交點。

> **想一想** 可以利用對稱性把工作減半嗎？

可以。映射 $(x,y)\mapsto(-x,-y)$ 把曲線映回自身（因為它是奇函數），並把雙曲線的兩支互換。所以曲線與下支的交點和它與上支的交點一一對應，我們只需數算後者。

設 $u(x)=\sqrt{x^2+1}$。那麼 $|u'(x)| = |x|/\sqrt{x^2+1} < 1$，所以在曲線的每個分支上，差 $y-u$ 的導數都大於 $2-1=1>0$，每個分支最多給出一個交點。現在檢查各端：

- $-2<x<2$：$y-u$ 由 $-\infty$ 走到 $+\infty$。一個根。
- $x>2$：當 $x\to 2^+$ 時 $y-u\to-\infty$，而當 $x\to\infty$ 時 $y-u\approx 2x-x\to+\infty$。一個根。
- $x<-2$：當 $x\to-\infty$ 時 $y-u\approx 2x-|x|=3x\to-\infty$，而當 $x\to-2^-$ 時 $y-u\to+\infty$。一個根。

所以曲線與上支相交三次，而根據對稱性，與下支也相交三次。兩支沒有公共點（$u\geq 1$），所以這六個點有六個不同的 x 值，方程 (iii) 有**六**個實根。由於它是一條 6 次多項式方程（即 $3x^6-33x^4+92x^2-16=0$），它的所有根都是實數。

驗算

- 在 $x=0$ 附近，$y\approx 2x(-5)/(-4)=\frac{5}{2}x$，與切線吻合。
- 在 $x=1000$ 處，$y-2x\approx -0.002$：數值細小而且為負，與預期相符。
- 對原來的方程以數值方法搜尋變號位置，可找到 (i) 的根 $x\approx -2.212,\ 1,\ 2.713$；(ii) 只有 $x\approx -1.510$；而 (iii) 的根為 $x\approx \pm 0.431,\ \pm 2.155,\ \pm 2.484$。

常見錯誤

- 在除以 x^2-4 之前，忘記檢查 $x=\pm 2$ 不是根。
- 在 (iii) 中，只數算與 $y=\sqrt{x^2+1}$ 的交點，遺漏了負平方根。

- 在 (ii) 中，像 (i) 那樣假設「直線夠斜，所以每個分支一個根」：當斜率大於 2 時，外側的分支需要另作論證。

STEP 之外

這裏的數根方法，是中間值定理與單調性（monotonicity）的結合：一個連續、嚴格遞增而且由 $-\infty$ 走到 $+\infty$ 的函數，恰好有一個零點。在大學一年級的分析課程中，這兩個事實都會從實數的完備性（completeness）出發嚴格證明，而同樣的推理也是「每個奇數次實係數多項式都有一個實根」這類結果的基礎。Abbott 的 *Understanding Analysis* 對此有非常精彩的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。