詳細解答

STEP II 2006，第 9 題

力學 • 摩擦力與傾倒

STEP II 2006，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

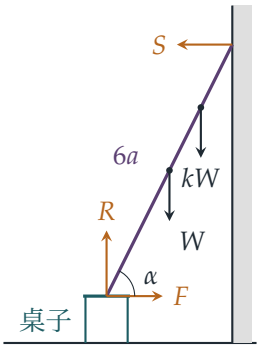
step.maths.org/questions/06-s2-q9

關鍵思路

把梯子和桌子視為兩個獨立的物體，兩者靠梯腳處的接觸連繫起來。單看梯子，便可求出梯腳處的反作用力和摩擦力，而這兩個力取決於油漆工站得多高。然後根據牛頓第三定律（Newton's third law），同樣的力以相反方向作用於桌子。對於桌子，我們比較兩個臨界值：一個是令桌子滑動的推力，另一個是對遠端桌腳的力矩（moment）大於桌上重量的力矩的推力。

解答

我們把梯子模擬為均勻桿（uniform rod），油漆工模擬為質點（particle），牆壁視為光滑（smooth），桌子則視為剛體（rigid body），桌面高度為 a（忽略桌面的厚度）。設 $\alpha = \arctan 2$，則 $\tan\alpha = 2$、$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 及 $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$。設油漆工站在沿梯子距梯腳 x 之處，其中 $0 \le x \le 6a$。



第 (i) 部分

作用於梯子的力有：作用於梯子中點的重量 W、油漆工的重量 kW、光滑牆壁給予的水平反作用力 S，以及梯腳處向上的法向反作用力（normal reaction）R 和指向牆壁的摩擦力（friction）F。（摩擦力必須指向牆壁，因為它是唯一能與 S 平衡的水平力。）

沿鉛垂和水平方向分解力，得

$$R = (k+1)W, \qquad F = S.$$

對梯腳取力矩：梯頂比梯腳高 $6a\sin\alpha$，而兩個重量的作用線與梯腳的水平距離分別為 $3a\cos\alpha$ 和 $x\cos\alpha$，所以

$$S \cdot 6a\sin\alpha = W \cdot 3a\cos\alpha + kW \cdot x\cos\alpha.$$

兩邊除以 $6a\sin\alpha$，並利用 $\cot\alpha = \frac{1}{2}$，得

$$F = S = \frac{W}{12}\Big(3 + \frac{kx}{a}\Big).$$

此式隨 x 遞增，所以當油漆工站在梯子最頂端，即 $x = 6a$ 時，所需的摩擦力最大：

$$F_{\max} = \frac{(3+6k)W}{12} = \frac{(2k+1)W}{4}.$$

可提供的最大摩擦力為

$$\tfrac{1}{2}R = \frac{(k+1)W}{2} = \frac{(2k+2)W}{4}.$$

由於 $2k+1 < 2k+2$，無論油漆工站在哪個位置，也無論 k 取何值，都有 $F \le F_{\max} < \frac{1}{2}R$。因此，在桌子固定的情況下，不論油漆工站得多高，梯子都不會滑動，這正是所要證明的。

第 (ii) 部分

現在 $k = 9$，所以 $R = 10W$，而

$$F = \frac{W}{4}\Big(1 + \frac{3x}{a}\Big),$$

它由 $x = 0$ 時的 $\frac{1}{4}W$ 增至 $x = 6a$ 時的 $\frac{19}{4}W$。第 (i) 部分的結論仍然適用，所以梯子不會在桌面上滑動。

根據牛頓第三定律，梯子在桌面中心對桌面施力：一個向下的力 $R = 10W$，以及一個背離牆壁的水平力 F。桌子本身的重量 $2W$ 亦作用於其中心，而地面則以法向反作用力和摩擦力作用於各桌腳。

? **想一想** 作用於桌面中心的水平推力，怎樣能令桌子傾側？

推力 F 作用於高度 a 處，所以它對離牆最遠的兩條桌腳的底部有力矩。如果桌子傾側，它會繞着連接這兩條桌腳底部的直線轉動。各桌腳位於邊長為 $\frac{1}{2}a$ 的正方形的四個頂點，所以該直線與桌子中心的水平距離為 $\frac{1}{4}a$。

傾側。對連接遠端桌腳底部的直線而言，地面作用於遠端桌腳的力沒有力矩，地面作用於任何一條桌腳的摩擦力也沒有力矩（因為它作用於地面的高度）。作用於中心的向下的力 $10W + 2W = 12W$ 有恢復力矩 $12W \cdot \frac{1}{4}a = 3Wa$。推力 F 則有傾覆力矩 Fa。對這條直線取力矩，離牆最近的兩條桌腳所受的法向反作用力（合計）N_1 滿足

$$N_1 \cdot \tfrac{1}{2}a = 3Wa - Fa,$$

所以 $N_1 \geq 0$ 當且僅當 $F \leq 3W$。當 $N_1 = 0$ 時，桌子即將傾側，也就是當

$$\frac{W}{4}\left(1 + \frac{3x}{a}\right) = 3W \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{11a}{3}.$$

滑動。對桌子沿鉛垂方向分解力，地面給予的法向反作用力合共為 $12W$，所以可提供的最大總摩擦力為 $\frac{1}{3} \cdot 12W = 4W$。沿水平方向分解力，所需的摩擦力為 F。所以桌子即將滑動的條件是

$$\frac{W}{4}\left(1 + \frac{3x}{a}\right) = 4W \quad \Longleftrightarrow \quad x = 5a.$$

這兩個值都在梯子的長度 $6a$ 之內，而 F 隨着油漆工向上爬而不斷增加。它先達到 $3W$（在 $x = \frac{11}{3}a$ 時），然後才達到 $4W$（在 $x = 5a$ 時）。所以**桌子先傾側**。這發生在油漆工沿梯子走了 $\frac{11}{3}a$ 之時，即在桌面之上 $\frac{11}{3}a \sin\alpha = \frac{22a}{3\sqrt{5}} \approx 3.28a$ 的高度。在那一刻，地面所需提供的摩擦力只是 $3W$，小於可提供的 $4W$，所以桌子並未滑動。

驗算

- 梯上沒有油漆工時（$x = 0$），$F = \frac{1}{4}W$，近牆的桌腳承受 $N_1 = \frac{11}{2}W$，而遠端的桌腳承受 $\frac{13}{2}W$。遠端桌腳承受的力稍大，這與推力背離牆壁的方向相符。
- 用電腦對多個 k 和 x 的值計算各個力。在 (i) 中，所需摩擦力與可提供摩擦力之比的最大值僅略小於 1（在梯頂時為 $\frac{2k+1}{2k+2}$）。在 (ii) 中，電腦求得近牆桌腳的反作用力在 $x \approx 3.667a$ 時變為零，而地面摩擦力在 $x = 5a$ 時達到極限。

常見錯誤

- 把傾側的轉軸取在距離中心 $\frac{1}{2}a$ 的桌邊：桌面的邊長是 $\frac{1}{2}a$，所以半闊度是 $\frac{1}{4}a$。
- 忘記了作用於桌子的推力位於高度 a 處，即桌腳的頂端，而不是在地面的高度。正是這個高度令推力產生傾覆力矩。

► 計算地面對桌子的法向反作用力時，漏掉了梯子和油漆工的 $10W$。只計桌子本身的重量 $2W$ 並不足夠。

STEP 之外

這道題探討的是由多個剛體組成的系統怎樣以互相競爭的方式失效：滑動，或是翻倒。方法是求出每種方式的臨界值，再看負載先達到哪一個。工程師把同樣的想法應用於擋土牆、起重機和堆疊的貨物；在靜力學（statics）課程中，它會進一步引申到虛功原理（principle of virtual work）。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對剛體平衡和摩擦力有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。