詳細解答

STEP II 2006，第 8 題

純數學 • 直線的向量幾何

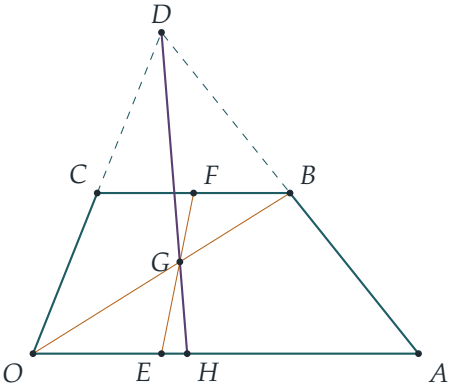
STEP II 2006，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/06-s2-q8

關鍵思路

題目中每一點都定義為兩條直線的交點，所以整條題目只靠一套固定做法：把每條直線寫成第一部分的形式，令兩個表達式相等，然後比較 **a** 和 **c** 的係數（comparing coefficients）。這樣比較是合理的，因為 **a** 與 **c** 不平行，所以一個向量寫成 $p\mathbf{a}+q\mathbf{c}$ 的方式只有一種。



解答

直線的方程

通過位置向量（position vector）為 **x** 和 **y** 的兩點的直線，經過 **x**，方向為 $\mathbf{y}-\mathbf{x}$，所以線上的點是

$$\mathbf{r}=\mathbf{x}+\alpha(\mathbf{y}-\mathbf{x})=(1-\alpha)\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y},$$

其中 α 取遍所有實數。留意 $\alpha = 0$ 給出 $\mathbf{x}$，$\alpha = 1$ 給出 $\mathbf{y}$，而兩個係數之和恆為 1。這就是所要求的形式。

在整個解答中，$\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{c}$ 都不平行（否則 O、A、C 三點共線（collinear），便不會有梯形（trapezium)），所以若 $p\mathbf{a} + q\mathbf{c} = p'\mathbf{a} + q'\mathbf{c}$，則 $p = p'$ 且 $q = q'$。

第 (i) 部分

由於 CB 平行於 OA，向量 $\overrightarrow{CB}$ 是 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ 的純量倍數（scalar multiple）；記它為 $\lambda\mathbf{a}$。於是

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \mathbf{c} + \lambda\mathbf{a}.$$

按次序繞 $OABC$ 一周，$\overrightarrow{CB}$ 與 $\overrightarrow{OA}$ 方向相同，所以 $\lambda > 0$；而 $CB < OA$ 給出 $\lambda < 1$。因此 $0 < \lambda < 1$，特別地 $\lambda \neq 1$，這一點稍後會用到。

第 (ii) 部分

E **和** F。這兩點可直接由比例得出：

$$\mathbf{e} = \tfrac{1}{3}\mathbf{a}, \qquad \mathbf{f} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{b}) = \tfrac{1}{2}\lambda\mathbf{a} + \mathbf{c}.$$

D。直線 OC 上的點是 $\mu\mathbf{c}$。直線 AB 上的點是

$$(1 - \beta)\mathbf{a} + \beta(\lambda\mathbf{a} + \mathbf{c}) = (1 - \beta + \beta\lambda)\mathbf{a} + \beta\mathbf{c}.$$

在 D 點，兩者相等。比較係數得 $\beta = \mu$ 及 $1 - \beta(1 - \lambda) = 0$，所以 $\beta = \dfrac{1}{1 - \lambda}$（沒有問題，因為 $\lambda \neq 1$)。因此

$$\mathbf{d} = \frac{1}{1 - \lambda}\,\mathbf{c}.$$

由於 $\frac{1}{1-\lambda} > 1$，D 確實位於 OC 越過 C 的延長線上，與預期相符。

G。OB 上的點是 $t(\lambda\mathbf{a} + \mathbf{c})$。$EF$ 上的點是

$$(1 - s)\tfrac{1}{3}\mathbf{a} + s(\tfrac{1}{2}\lambda\mathbf{a} + \mathbf{c}) = (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}s + \tfrac{1}{2}\lambda s)\mathbf{a} + s\mathbf{c}.$$

比較 $\mathbf{c}$ 的係數得 $s = t$；再比較 $\mathbf{a}$ 的係數，得

$$\lambda t = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}t + \tfrac{1}{2}\lambda t \quad\Longrightarrow\quad t\Big(\frac{3\lambda + 2}{6}\Big) = \frac{1}{3} \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{2}{3\lambda + 2}.$$

所以

$$\mathbf{g} = \frac{2}{3\lambda + 2}\,(\lambda\mathbf{a} + \mathbf{c}).$$

H。直線 DG 上的點是

$$(1 - k)\mathbf{d} + k\mathbf{g} = \frac{2k\lambda}{3\lambda + 2}\,\mathbf{a} + \Big(\frac{1 - k}{1 - \lambda} + \frac{2k}{3\lambda + 2}\Big)\mathbf{c}.$$

想一想 怎樣從這條直線上找出位於 OA 上的那一點？

直線 OA 上的點只是 $\mathbf{a}$ 的倍數，所以我們需要 $\mathbf{c}$ 的係數等於零。兩邊乘以 $(1-\lambda)(3\lambda+2)$，

$$\begin{aligned}(1-k)(3\lambda+2)+2k(1-\lambda)&=0\\(3\lambda+2)-k(3\lambda+2-2+2\lambda)&=0\\k&=\frac{3\lambda+2}{5\lambda}.\end{aligned}$$

這時 $\mathbf{a}$ 的係數是

$$\frac{2\lambda}{3\lambda+2}\cdot\frac{3\lambda+2}{5\lambda}=\frac{2}{5},\qquad \text{所以}\qquad \mathbf{h}=\tfrac{2}{5}\,\mathbf{a}.$$

把答案整理如下：

$$\mathbf{d}=\frac{\mathbf{c}}{1-\lambda},\quad \mathbf{e}=\tfrac{1}{3}\mathbf{a},\quad \mathbf{f}=\tfrac{1}{2}\lambda\mathbf{a}+\mathbf{c},\quad \mathbf{g}=\frac{2(\lambda\mathbf{a}+\mathbf{c})}{3\lambda+2},\quad \mathbf{h}=\tfrac{2}{5}\mathbf{a}.$$

由於 $OH=\frac{2}{5}OA$ 及 $HA=\frac{3}{5}OA$，

$$OH:HA=2:3,$$

不論梯形是甚麼形狀，結果都一樣。

驗算

- 取 $\mathbf{a}=(6,0)$、$\mathbf{c}=(1,2.5)$ 及 $\lambda=\frac{1}{2}$（即圖中的情況）。由公式得 $D=(2,5)$、$G\approx(2.286,1.429)$ 及 $H=(2.4,0)$；由 D 到 G 的斜率是 $-3.571/0.286=-12.5$，由 D 到 H 的斜率也是這個值，即 $-5/0.4$。所以 D、G、H 確實共線。
- H 的答案與 λ、$\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{c}$ 都無關。我們用電腦以精確的有理數運算，對 2000 個隨機梯形重複整個作圖過程，每次都得到 $OH:HA=2:3$。
- 當 $\lambda\to1$ 時，邊 OC 與 AB 趨於平行，而 $\mathbf{d}=\mathbf{c}/(1-\lambda)$ 跑向無窮遠，與預期相符。

常見錯誤

- 兩條不同的直線用了同一個參數 (parameter) 字母。每條直線都要有自己的參數，然後才可令兩式相等。
- 比較係數卻沒有說明為何可以這樣做：這方法行得通，是因為 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{c}$ 不平行。
- 寫成 $\mathbf{b}=\mathbf{a}+\lambda\mathbf{c}$。與 $\mathbf{a}$ 平行的是 $\overrightarrow{CB}$，而不是 $\overrightarrow{AB}$。

STEP 之外

答案 2 : 3 與梯形的形狀無關，是因為每一步只用到直線、交點和直線上的比例，而仿射變換（affine map，即線性變換（linear map）之後再作平移）會保持這一切不變。所以你可以把梯形變換成一個方便計算的梯形，例如令 $OABC$ 中的 C 位於 O 的正上方，然後在那裏計算。這就是仿射幾何（affine geometry）的想法；係數形式 $(1-\alpha)\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$ 正是重心坐標（barycentric coordinates）的起點。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra* 講解線性變換和坐標，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 則有更多這類風格的向量幾何題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。