詳細解答

STEP II 2006，第 7 題

純數學 • 橢圓的切線

> **STEP II 2006，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q7

關鍵思路

求切線（tangent）最快的方法，是用「把 x^2 換成 xx_0、把 y^2 換成 yy_0」的形式，用隱函數微分法（implicit differentiation）也同樣可以。至於那個作圖，只需求出 Q 的坐標和 PQ 的方程，再與一般點上的切線比較。題目中 $\tan(\alpha/2) = k$ 這幾個字是很強的提示：它叫你用 $t = \tan(\alpha/2)$ 來表示 $\cot\alpha$ 和 $\operatorname{cosec}\alpha$。

解答

切線

把 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 對 x 作隱函數微分，得

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

在 $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ 處，設 $\sin\alpha \neq 0$（否則切線是鉛垂線，題目所給的方程便沒有意義），斜率（gradient）為

$$-\frac{b^2 a\cos\alpha}{a^2 b\sin\alpha} = -\frac{b\cot\alpha}{a}.$$

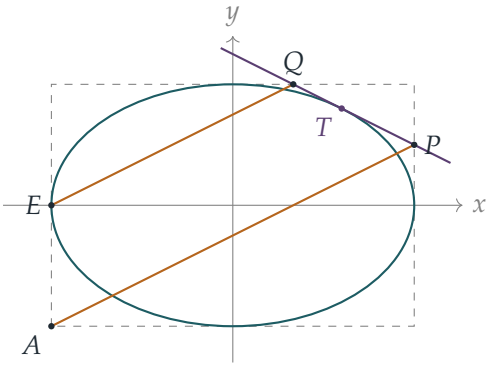
所以切線是

$$\begin{aligned} y - b\sin\alpha &= -\frac{b\cot\alpha}{a}(x - a\cos\alpha) \\ \implies \quad y &= -\frac{b\cot\alpha}{a}x + b\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + b\sin\alpha = -\frac{b\cot\alpha}{a}x + \frac{b(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}{\sin\alpha}, \end{aligned}$$

即 $y = -\dfrac{b\cot\alpha}{a}x + b\operatorname{cosec}\alpha$，這正是所求。

作圖

下圖取 $a=3$、$b=2$、$k=\frac{1}{2}$。橢圓（ellipse）位於以 $(\pm a,\pm b)$ 為頂點的長方形之內；A 是左下角的頂點，E 是左邊的中點，P 在右邊上，而 Q 在上邊上。



直線 AP 連接 $(-a,-b)$ 與 (a,kb)，所以它的斜率是

$$\frac{kb-(-b)}{a-(-a)}=\frac{(1+k)b}{2a}.$$

通過 $E(-a,0)$ 的平行線是 $y=\dfrac{(1+k)b}{2a}(x+a)$。代入 $y=b$ 得 $x+a=\dfrac{2a}{1+k}$，所以

$$Q=\left(\frac{a(1-k)}{1+k},\ b\right).$$

於是 PQ 的斜率是

$$\frac{b-kb}{\dfrac{a(1-k)}{1+k}-a}=\frac{b(1-k)}{\dfrac{-2ak}{1+k}}=-\frac{b(1-k^2)}{2ak},$$

由於 $k\neq 0$，這個式子沒有問題。利用點 $P(a,kb)$，直線 PQ 是

$$y=kb-\frac{b(1-k^2)}{2ak}(x-a)=-\frac{b(1-k^2)}{2ak}\,x+\frac{2k^2b+b(1-k^2)}{2k},$$

所以

$$PQ:\qquad y=-\frac{b}{a}\cdot\frac{1-k^2}{2k}\,x+b\cdot\frac{1+k^2}{2k}.$$

想一想 我們怎樣看出這是橢圓上某一點的切線？

把它與上面求得在 $(a\cos\alpha,b\sin\alpha)$ 處的切線比較。我們需要找一個 α，使得 $\cot\alpha=\dfrac{1-k^2}{2k}$ 及 $\operatorname{cosec}\alpha=\dfrac{1+k^2}{2k}$。這正是 t 公式（t-formulae）：設 $t=\tan(\alpha/2)$，則

$$\tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2},\qquad \sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \text{所以}\qquad \cot\alpha=\frac{1-t^2}{2t},\qquad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1+t^2}{2t}.$$

由於 $0 < k < 1$，我們可以取 $\alpha = 2\arctan k$，它位於 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之內，所以 $\sin\alpha \neq 0$，而且 $\tan(\alpha/2) = k$。取 $t = k$，這兩個表達式便與 PQ 的斜率和截距（intercept）都吻合。所以 PQ 就是直線 $y = -\frac{b\cot\alpha}{a}x + b\operatorname{cosec}\alpha$，亦即橢圓在 $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ 處的切線，其中 $\tan(\alpha/2) = k$。這正是我們要證明的。

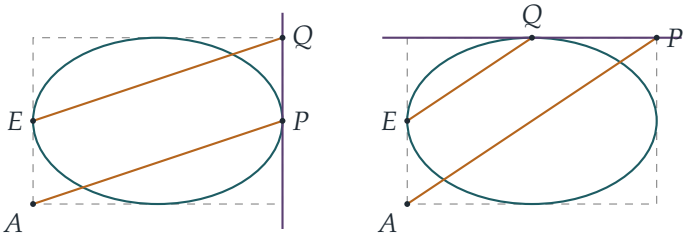
用坐標表示，切點（point of contact）是 $T = \left(\frac{a(1-k^2)}{1+k^2}, \frac{2kb}{1+k^2}\right)$。

$k = 0$ 與 $k = 1$ 的情況

上面的代數運算曾經除以 k，而切線公式又需要 $\sin\alpha \neq 0$，所以我們直接把作圖重做一次。

$k = 0$。這時 $P = (a, 0)$，而 AP 的斜率是 $\frac{b}{2a}$。通過 E 的平行線是 $y = \frac{b}{2a}(x + a)$，它與 $y = b$ 相交於 $x = a$，所以 $Q = (a, b)$。於是 PQ 是鉛垂線 $x = a$。這是橢圓在 $(a, 0)$ 處的切線，該點對應 $\alpha = 0$，而 $\tan(0/2) = 0 = k$。所以即使這條切線不能寫成 $y = mx + c$ 的形式，結果*確實*仍然成立。

$k = 1$。這時 $P = (a, b)$，而 AP 是長方形的對角線，斜率為 $\frac{b}{a}$。通過 E 的平行線是 $y = \frac{b}{a}(x + a)$，它與 $y = b$ 相交於 $x = 0$，所以 $Q = (0, b)$。於是 PQ 是水平線 $y = b$，即橢圓最高點 $(0, b)$ 處的切線。這一點對應 $\alpha = \frac{\pi}{2}$，而 $\tan(\pi/4) = 1 = k$。所以結果在這裏同樣成立（而且公式也適用：由 $\cot\frac{\pi}{2} = 0$ 和 $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2} = 1$ 得出 $y = b$）。



驗算

- 取 $a = 3$、$b = 2$、$k = \frac{1}{2}$。這時 $Q = (1, 2)$，而 PQ 是 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$。另外 $\tan\alpha = \frac{4}{3}$，所以 $\cos\alpha = \frac{3}{5}$、$\sin\alpha = \frac{4}{5}$，而 $T = (\frac{9}{5}, \frac{8}{5})$。這一點在 PQ 上（$-\frac{9}{10} + \frac{5}{2} = \frac{8}{5}$），而該處的斜率是 $-\frac{b^2x}{a^2y} = -\frac{4\cdot 9/5}{9\cdot 8/5} = -\frac{1}{2}$。
- 把 PQ 代入橢圓方程，應該得到一條有重根（repeated root）的二次方程。我們已用一千組隨機的 a、b、k 以數值方法驗證了這一點，以及 Q 和 PQ 的公式。
- 當 $k \to 0^+$ 時，$T \to (a, 0)$；當 $k \to 1^-$ 時，$T \to (0, b)$。這與兩個端點情況一致。

常見錯誤

- 弄錯 PQ 斜率的正負號：分母 $\frac{a(1-k)}{1+k} - a$ 是負數。
- 因為 $\operatorname{cosec} 0$ 沒有定義，便說結果在 $k = 0$ 時不成立。失效的只是公式，幾何上並沒有問題：PQ 仍然是 $\alpha = 0$ 處的切線。

STEP 之外

代換 $t = \tan(\alpha/2)$ 給出橢圓的一個有理參數化（rational parametrisation）：$\left(a\frac{1-t^2}{1+t^2}, b\frac{2t}{1+t^2}\right)$。把三角函數積分化為有理函數積分，以及求出所有畢氏三元數（Pythagorean triples），用的都是同一個想法。每一條圓錐曲線（conic）都可以這樣作有理參數化，而像本題這種只靠平行線和交點完成的作圖，正是射影幾何（projective geometry）研究的對象。想初步了解這與數論（number theory）的關係，可以讀 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。