詳細解答

STEP II 2006，第 5 題

純數學 • 下取整函數與面積

> **STEP II 2006，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q5

關鍵思路

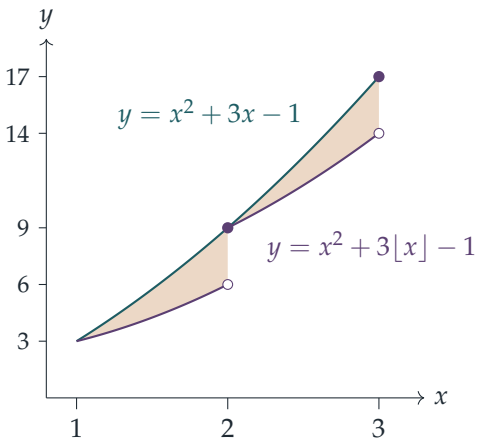
在兩個相鄰整數之間，即 $k \le x < k+1$ 時，下取整函數（floor function）是常數，其值為 k。因此在每一個這樣的單位區間上，那條鋸齒狀的曲線其實只是一條普通的光滑曲線，而所求面積可以分拆成若干長條的面積之和，每個單位區間對應一條。先把 $[k, k+1]$ 上那一條的面積寫成 k 的函數，再把 $k = 1, 2, \ldots, n-1$ 的各條加起來。

解答

以下一律記 $f(x) = x^2 + 3x - 1$。在 $1 \le x \le 3$ 上，它由 $f(1) = 3$ 經過 $f(2) = 9$ 升至 $f(3) = 17$；而且對所有 $x \ge 1$ 它都是遞增的，因為在該範圍內 $f'(x) = 2x + 3 > 0$。

第 (i) 部分

第二條曲線是 $y = x^2 + 3\lfloor x \rfloor - 1$。在 $[1, 2)$ 上有 $\lfloor x \rfloor = 1$，所以它是 $y = x^2 + 2$，由 3 升向 6；在 $[2, 3)$ 上有 $\lfloor x \rfloor = 2$，所以它是 $y = x^2 + 5$，由 9 升向 14；而在 $x = 3$ 處它等於 17。每一段都是拋物線 $y = f(x)$ 向下平移所得，而兩條曲線在每個整數處相交。



兩條曲線之間的垂直距離是

$$(x^2 + 3x - 1) - (x^2 + 3\lfloor x \rfloor - 1) = 3(x - \lfloor x \rfloor) \geq 0,$$

所以第一條曲線永遠不會在第二條之下。在區間 $[k, k+1]$ 上（k 為整數），這個距離是 $3(x-k)$，只有 $x = k+1$ 這一點例外，而單獨一點並不影響積分。因此 $[k, k+1]$ 上的長條面積為

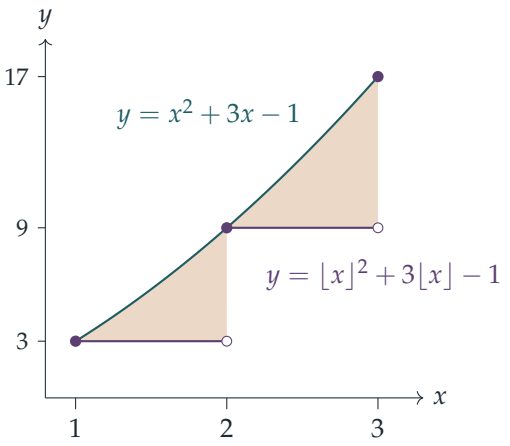
$$\int_k^{k+1} 3(x-k)\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{3}{2}(x-k)^2\right]_k^{k+1} = \tfrac{3}{2},$$

對每個 k 都相同。區間 $1 \leq x \leq n$ 由 $n-1$ 個單位區間 $[1,2], [2,3], \ldots, [n-1, n]$ 組成，所以兩條曲線之間的面積是

$$\tfrac{3}{2}(n-1).$$

第 (ii) 部分

現在第二條曲線是 $y = f(\lfloor x \rfloor)$，這是一個階梯函數（step function）：在 $[1,2)$ 上 $y = f(1) = 3$，在 $[2,3)$ 上 $y = f(2) = 9$，而在 $x = 3$ 處 $y = f(3) = 17$。每一級階梯都由拋物線上某個整數點出發，水平向右延伸。



想一想 哪一條曲線在上方？它會一直在上方嗎？

由於 f 在 $x \geq 1$ 時遞增，而且 $\lfloor x \rfloor \leq x$，所以在整個 $1 \leq x \leq n$ 上都有 $f(\lfloor x \rfloor) \leq f(x)$。因此拋物線始終在上方，所求面積就是 $f(x) - f(\lfloor x \rfloor)$ 的積分，無須擔心正負號改變。

在 $[k, k+1]$ 上（$k \geq 1$ 為整數），階梯的高度是 $f(k)$（同樣不理會 $x = k+1$ 這一點）。代入 $x = k + t$，其中 $0 \leq t \leq 1$，

$$\begin{aligned} f(k+t) - f(k) &= (k+t)^2 + 3(k+t) - 1 - (k^2 + 3k - 1) \\ &= 2kt + t^2 + 3t, \end{aligned}$$

所以 $[k, k+1]$ 上的長條面積為

$$\int_0^1 (2kt + t^2 + 3t)\,\mathrm{d}t = k + \tfrac{1}{3} + \tfrac{3}{2} = k + \tfrac{11}{6}.$$

與第 (i) 部分不同，這次長條的面積隨 k 增大，因為拋物線愈來愈陡。把 $k = 1, 2, \ldots, n-1$ 的長條加起來，並利用 $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1)$，

$$\begin{aligned} \text{面積} &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(k + \tfrac{11}{6}\right) = \tfrac{1}{2}n(n-1) + \tfrac{11}{6}(n-1) \\ &= \tfrac{1}{6}(n-1)(3n+11), \end{aligned}$$

這正是所要求的結果。

驗算

- 當 $n = 1$ 時根本沒有區域，而兩個答案都給出 0。
- 當 $n = 2$ 時，第 (ii) 部分給出 $\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 17 = \frac{17}{6}$。直接計算，$\int_1^2 (x^2 + 3x - 4)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{3} + \frac{9}{2} - 4 = \frac{17}{6}$。

- 以中點法則（midpoint rule）對 $n = 2, \ldots, 7$ 的差距作數值積分，結果與 $\frac{3}{2}(n-1)$ 及 $\frac{1}{6}(n-1)(3n+11)$ 吻合至小數點後四位；例如 $n = 4$ 時第 (ii) 部分給出 11.5。

常見錯誤

- 數成 n 條長條而不是 $n-1$ 條：區間 $[1, n]$ 只包含 $n-1$ 個單位區間。
- 在第 (ii) 部分，誤用 $\int_0^1 2kt \, \mathrm{d}t = 2k$ 而不是 k。
- 在整個區間上把 $\lfloor x \rfloor$ 當作 x 來積分（或乾脆忽略它），而沒有先在各整數處把區間分開。

STEP 之外

第 (ii) 部分比較的是曲線下的面積與曲線下方一列「階梯」狀矩形的面積，這正正是步長為 1 的黎曼下和（lower Riemann sum）。在大學第一門分析（analysis）課程中，積分的定義就是讓階梯愈來愈窄，把這樣的下和與上和夾在一起；而像 $\lfloor x \rfloor$ 這類有跳躍的函數仍然可積（integrable），因為它們的跳躍點都是孤立點。Abbott 的 *Understanding Analysis* 對黎曼積分（Riemann integral）有非常易讀的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。