詳細解答

STEP II 2006，第 4 題

純數學 • 代換積分法

> **STEP II 2006，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q4

關鍵思路

代換（substitution）$x = \pi - t$ 不會改變 $\sin x$，卻會把因子 x 變成 $\pi - t$，於是原來的積分在等式右邊再次出現，可以像解方程一樣把它解出來。這樣就完全消去了礙事的因子 x。此後，題目中每個積分都是 $\sin x$ 的函數乘以 $\sin x$（或 $\cos x$），再用代換 $u = \cos x$ 或 $u = \sin x$ 便可完成。真正要花心思的，是看出怎樣把第 (ii) 和第 (iii) 部分化成這條恆等式（identity）適用的形式。

解答

恆等式

設 $I = \int_0^\pi x\, f(\sin x)\, \mathrm{d}x$。令 $x = \pi - t$，則 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$；當 $x = 0$ 時，$t = \pi$，而當 $x = \pi$ 時，$t = 0$。由於 $\sin(\pi - t) = \sin t$，

$$\begin{aligned} I &= \int_\pi^0 (\pi - t)\, f(\sin t)\, (-\mathrm{d}t) = \int_0^\pi (\pi - t)\, f(\sin t)\, \mathrm{d}t \\ &= \pi \int_0^\pi f(\sin t)\, \mathrm{d}t - \int_0^\pi t\, f(\sin t)\, \mathrm{d}t = \pi \int_0^\pi f(\sin x)\, \mathrm{d}x - I, \end{aligned}$$

因為積分變量叫甚麼名字並無關係。因此 $2I = \pi \int_0^\pi f(\sin x)\, \mathrm{d}x$，這正是我們所需的結果：

$$\int_0^\pi x\, f(\sin x)\, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^\pi f(\sin x)\, \mathrm{d}x.$$

第 (i) 部分

這裏 $f(\sin x) = \dfrac{\sin x}{3+\sin^2 x}$，所以由恆等式可得

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi J, \qquad J = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

寫成 $3+\sin^2 x = 4-\cos^2 x$，並代入 $u = \cos x$，$\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$，其中 u 由 1 遞減至 -1：

$$J = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{4-u^2}.$$

利用部分分式（partial fractions），$\dfrac{1}{4-u^2} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2-u} + \dfrac{1}{2+u}\right)$，所以

$$J = \frac{1}{4}\left[\ln\frac{2+u}{2-u}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}(\ln 3 - \ln\tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{2}\ln 3.$$

（在 $[-1,1]$ 上，$2\pm u$ 兩者皆為正數，所以無須加上絕對值符號。）因此

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\ln 3.$$

第 (ii) 部分

想一想 恆等式只適用於 $[0,\pi]$。我們該怎樣處理 $[\pi, 2\pi]$？

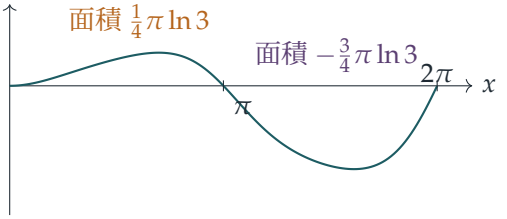
在 π 處把積分範圍分成兩段，再用 $x = \pi + t$ 把第二段平移回 $[0,\pi]$。這時 $\sin x = -\sin t$ 而 $\sin^2 x = \sin^2 t$，所以

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= -\int_0^{\pi} \frac{(\pi+t)\sin t}{3+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = -\pi J - \int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{3+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\tfrac{1}{2}\pi\ln 3 - \tfrac{1}{4}\pi\ln 3 = -\tfrac{3}{4}\pi\ln 3,\end{aligned}$$

當中用到 $J = \frac{1}{2}\ln 3$ 和第 (i) 部分的結果。加上第 (i) 部分在 $[0,\pi]$ 上的積分，

$$\int_0^{2\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\ln 3 - \frac{3\pi}{4}\ln 3 = -\frac{\pi}{2}\ln 3.$$

下面的草圖說明了答案為何是負數：被積函數（integrand）在兩半區間上的形狀相同，但在 $[\pi, 2\pi]$ 上，它所乘的 x 值較大。



第 (iii) 部分

由於 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$，而且在 $[0,\pi]$ 上 $\sin x \geq 0$，

$$|\sin 2x| = 2\sin x\,|\cos x| = 2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x},$$

這純粹是 $\sin x$ 的函數。

> **想一想** 為甚麼這裏出現的是 $|\cos x|$ 而不是 $\cos x$，這一點如此重要？

在 $[0,\pi]$ 上，$\cos x$ 並不是 $\sin x$ 的函數：$\cos(\pi - x) = -\cos x$，而 $\sin(\pi - x) = \sin x$。但 $|\cos x| = \sqrt{1-\sin^2 x}$ 卻是，所以正是有了絕對值，我們才可以使用恆等式：

$$\int_0^\pi \frac{x|\sin 2x|}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi\int_0^\pi \frac{|\sin 2x|}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

新的被積函數在 $x \mapsto \pi - x$ 之下保持不變，所以在 $[0,\pi]$ 上的積分是在 $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上的積分的兩倍，而在後者的區間上 $\cos x \geq 0$，絕對值符號可以去掉：

$$\int_0^\pi \frac{|\sin 2x|}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x\cos x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\Big[\ln(3+\sin^2 x)\Big]_0^{\pi/2} = 2\ln\tfrac{4}{3},$$

因為分子正是分母的導數。因此

$$\int_0^\pi \frac{x|\sin 2x|}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi\cdot 2\ln\tfrac{4}{3} = \pi\ln\frac{4}{3}.$$

驗算

- 用辛普森法則（Simpson's rule）計算，(i) 得 0.86285，(ii) 得 -1.72570，(iii) 得 0.90378，與 $\frac{1}{4}\pi\ln 3$、$-\frac{1}{2}\pi\ln 3$ 和 $\pi\ln\frac{4}{3}$ 吻合。
- (ii) 的答案恰好是 (i) 的答案的 -2 倍。在 π 處分段便可解釋這一點：兩半分別是 $\frac{1}{4}\pi\ln 3$ 和 $-\frac{3}{4}\pi\ln 3$。
- 快速檢驗一下恆等式：取 $f \equiv 1$，兩邊都等於 $\frac{1}{2}\pi^2$。

常見錯誤

- 在 $[0,2\pi]$ 上套用類似的「恆等式」，這樣會得出 $\pi\int_0^{2\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = 0$。證明需要用到 $\sin(2\pi - t) = \sin t$，而這是錯的。
- 在 (iii) 中，在整個 $[0,\pi]$ 上都寫 $|\sin 2x| = 2\sin x\cos x$，這樣裏面的積分會得出 0。

STEP 之外

讓積分再次出現然後把它解出來的技巧，以及運用 $x \mapsto \pi - x$ 這類對稱性（symmetry），都是分析學（analysis）中的標準工具，也常用於計算沒有初等原函數（elementary antiderivative）的定積分。它們通向傅立葉級數（Fourier series），在那裏，x 乘以三角函數在一個周期上的積分正是最基本的研究對象。想多了解這類論證手法，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*；至於積分的嚴格理論，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。