詳細解答

STEP II 2006，第 3 題

純數學 • 根式與近似

> **STEP II 2006，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q3

關鍵思路

數 $5+\sqrt{24}$ 有一個「共軛數」(conjugate) $5-\sqrt{24}$，兩者相乘等於 1。把一個數與其共軛數的同次冪相加，所有根式 (surd) 都會互相抵消，所以和是整數。共軛數很小，它的冪就更加微小，因此那個大的冪必定恰好略小於一個整數。第 (ii) 部分是同一個論證，只是把 5 換成 N。

解答

第 (i) 部分

設 $a=5+\sqrt{24}$ 及 $b=5-\sqrt{24}$。則

$$a+b=10, \qquad ab=25-24=1,$$

所以 $b=1/a$。因此我們要求的式子就是 a^4+b^4。兩次運用 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$：

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= 10^2-2=98, \\ a^4+b^4 &= (a^2+b^2)^2-2(ab)^2=98^2-2=9602. \end{aligned}$$

所以 $a^4+\dfrac{1}{a^4}=9602$，是一個整數。

至於各個不等式（inequality），記得 $\dfrac{1}{a}=b=5-\sqrt{24}$。

- $b>0.1 \iff \sqrt{24}<4.9 \iff 24<24.01$，這是成立的。（這裏取平方是可逆的，因為兩邊都是正數。）

- $b < \frac{2}{19} \iff \sqrt{24} > 5 - \frac{2}{19} = \frac{93}{19} \iff 24 \cdot 19^2 > 93^2 \iff 8664 > 8649$，這是成立的。
- $\frac{2}{19} < 0.11 \iff 2 < 2.09$，這是成立的。

所以 $0.1 < \dfrac{1}{5+\sqrt{24}} < \dfrac{2}{19} < 0.11$。

想一想 這些上下界怎樣把 a^4 確定至小數點後四位？

由第一個結果，$a^4 = 9602 - b^4$。把各項皆為正數的不等式 $0.1 < b < 0.11$ 取四次方，

$$0.0001 < b^4 < 0.11^4 = 0.00014641,$$

因此

$$9601.99985359 < a^4 < 9601.9999.$$

這個區間內的每一個數都介乎 9601.99985 與 9601.9999 之間，所以捨入後得

$$\left(5+\sqrt{24}\right)^4 = 9601.9999 \text{ （準確至小數點後四位）。}$$

（較精確的上界 $b < \frac{2}{19}$ 給出 $b^4 < \frac{16}{130321} \approx 0.000123$，這裏用不着，但它說明了 $\frac{2}{19}$ 的來歷：見「驗算」。）

第 (ii) 部分

設 $A = N + \sqrt{N^2-1}$ 及 $B = N - \sqrt{N^2-1}$，由於 $N \geq 2$，兩者皆為實數。與之前一樣，

$$A + B = 2N, \qquad AB = N^2 - (N^2-1) = 1.$$

*第一步：$A^k + B^k$ 是整數。*用二項式定理(binomial theorem)展開這兩個冪。含 $\sqrt{N^2-1}$ 偶數次冪的項都是整數，而且在兩個展開式中完全相同；含奇數次冪的項則正負號相反，互相抵消。所以對每個正整數 k，$S_k = A^k + B^k$ 都是整數。（另一做法：A 和 B 是 $x^2 - 2Nx + 1 = 0$ 的根，所以 $S_k = 2NS_{k-1} - S_{k-2}$，其中 $S_0 = 2$，$S_1 = 2N$，再用歸納法（induction）便知它們全是整數。）

*第二步：B 很小。*我們斷言 $0 < B < \dfrac{1}{2N - \frac{1}{2}}$。由於 $B = 1/A$ 且 $A > 0$，這等價於

$$A > 2N - \tfrac{1}{2} \iff \sqrt{N^2-1} > N - \tfrac{1}{2}.$$

兩邊都是正數（因為 $N \geq 2$），所以可以取平方：

$$N^2 - 1 > N^2 - N + \tfrac{1}{4} \iff N > \tfrac{5}{4},$$

而這是成立的，因為 $N \geq 2$。所以 $0 < B < \left(2N - \frac{1}{2}\right)^{-1}$，再取 k 次方（各項皆為正數），

$$0 < B^k < \left(2N - \tfrac{1}{2}\right)^{-k}.$$

第三步：作結。我們有 $A^k = S_k - B^k$，所以 A^k 與整數 S_k 的距離恰好是 B^k。最接近 A^k 的整數，與它的距離不會比 S_k 更遠（事實上這個整數就是 S_k，因為 $B^k < \frac{1}{2}$）。因此

$$\left|A^k - (\text{最接近的整數})\right| \le B^k < \left(2N - \tfrac{1}{2}\right)^{-k},$$

這就是所要證明的結果。

驗算

- 以數值計算，$(5+\sqrt{24})^4 \approx 9601.999896$，落在我們的區間之內，捨入後是 9601.9999。
- 取 $N=5$，第 (ii) 部分給出 $(2N-\frac{1}{2})^{-1} = \frac{1}{9.5} = \frac{2}{19}$：正正是第 (i) 部分的上界。所以第 (i) 部分其實就是 $N=5$，$k=4$ 的情況，只是換了個面貌。
- 當 $N=2$，$k=1$：$2+\sqrt{3} \approx 3.732$ 與 4 相距約 0.268，而 $(3.5)^{-1} \approx 0.286$，所以上界成立。我們亦用電腦核對過 N 至 1000、k 至 24 的所有情況。

常見錯誤

- 把 $\sqrt{N^2-1} > N - \frac{1}{2}$ 兩邊取平方，卻沒有指出兩邊都是正數。
- 寫成 $a^4 \approx 9602.0000$：這個值比 9602 小，相差介乎 0.0001 與 0.00015 之間，而這已足以改變小數點後第四位。
- 忘記了排除 $N=1$ 的情況是有原因的：那時 $B=1$，整個論證便不成立。

STEP 之外

像 $5+\sqrt{24}$ 這樣的數是環(ring)$\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ 中的單位(unit)：它們有同一形式的逆元 $5-\sqrt{24}$，而它們的冪給出佩爾方程（Pell equation）$x^2 - 24y^2 = 1$ 的所有解。這類單位的冪會越來越接近整數，這也是通往皮索數 (Pisot number) 理論的其中一條途徑，皮索數的冪同樣有這種接近整數的性質。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（一本初等數論名著）對佩爾方程和連分數（continued fraction）有十分精彩的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。