詳細解答

STEP II 2006，第 10 題

力學 • 碰撞與恢復係數

STEP II 2006，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/06-s2-q10

關鍵思路

每一次碰撞都是一道兩條方程的問題：沿直線方向的動量守恆（conservation of momentum），以及牛頓恢復定律（Newton's law of restitution）（分離速率等於 e 乘以接近速率）。先解 A–B 碰撞，再把 B 的新速度代入 B–C 碰撞。第二次 A–B 碰撞發生，當且僅當位於 B 後方的 A，其向前的速度最終大於 B 在 B 撞上 C 之後的速度。第 (ii) 部分於是成為一道匀速的追及問題。

解答

我們把 A、B 和 C 視為在光滑（smooth）平面上沿一條直線運動的質點（particle），因此除碰撞期間外，並無水平力作用。取 A 被拋射的方向為正方向。以下所有速度均帶正負號。

第 (i) 部分

A 與 B 的碰撞。設 A 和 B 在碰撞剛結束時的速度分別為 v_A 和 v_B。由動量守恆和恢復定律（其中 $e = \frac{1}{2}$）得

$$mv_A + km\,v_B = mu, \qquad v_B - v_A = \tfrac{1}{2}u.$$

把 $v_A = v_B - \frac{1}{2}u$ 代入第一條方程，得 $(1+k)v_B = \frac{3}{2}u$，所以

$$v_B = \frac{3u}{2(1+k)}, \qquad v_A = v_B - \frac{u}{2} = \frac{(2-k)\,u}{2(1+k)}.$$

由於 $v_B > 0$，B 確實會繼續向 C 移動；又由於 $v_A < v_B$，A 不可能在 B 到達 C 之前追上 B。

B 與 C 的碰撞。設 B 和 C 在碰撞剛結束時的速度分別為 w_B 和 w_C。取 $e = \frac{1}{4}$，

$$km\,w_B + 3m\,w_C = km\,v_B, \qquad w_C - w_B = \tfrac{1}{4}v_B.$$

代入 $w_C = w_B + \frac{1}{4}v_B$，得 $(k+3)w_B = (k - \frac{3}{4})v_B$，所以

$$w_B = \frac{(4k-3)\,v_B}{4(k+3)} = \frac{3(4k-3)\,u}{8(1+k)(k+3)}.$$

此外 $w_C > w_B$，所以 B 和 C 互相分開，此後不再相遇。這次碰撞之後，在 A 或 B 身上再無其他作用，直至兩者相遇為止（假如真的會相遇）。

想一想 A 與 B 再次碰撞的確切條件是甚麼？

一旦 B 撞上 C，A 和 B 都以恆定速度運動，而 A 在 B 的後方（即位於 B 的負方向一側）。兩者之間的距離縮短，當且僅當 $v_A > w_B$，而這時距離會在有限時間內縮減至零。若 $v_A \le w_B$，距離永不減少。這一條不等式已涵蓋所有正負號的情況：例如，若 A 正在向後運動，但 B 向後運動得更快，B 仍會追上 A，而這同樣是 $v_A > w_B$。

所以我們需要

$$\frac{(2-k)u}{2(1+k)} > \frac{3(4k-3)u}{8(1+k)(k+3)}.$$

兩邊乘以 $8(1+k)(k+3)/u$（由於 $k>0$，此數為正），得到等價的不等式

$$\begin{aligned} 4(2-k)(k+3) &> 3(4k-3) \\ 24 - 4k - 4k^2 &> 12k - 9 \\ 4k^2 + 16k - 33 &< 0 \\ (2k-3)(2k+11) &< 0. \end{aligned}$$

由於 $2k+11 > 0$，上式成立當且僅當 $2k-3<0$。因為 k 是質量之比，$k>0$。因此 A 與 B 發生第二次碰撞，當且僅當

$$0 < k < \tfrac{3}{2}.$$

當 $k = \frac{3}{2}$ 時，我們得到 $v_A = w_B = \frac{u}{10}$：兩者以相同速率一同前進，實際上永不再相遇，所以端點不包括在內。

第 (ii) 部分

取 $k=1$，由上面的公式得

$$v_A = \frac{u}{4}, \qquad v_B = \frac{3u}{4}, \qquad w_B = \frac{3u}{64}, \qquad w_C = \frac{15u}{64}.$$

把原點設在 A 與 B 首次碰撞之處（即 B 的起始位置），並由該次碰撞起計算時間 t。

直至 B–C 碰撞。B 以速率 $\frac{3}{4}u$ 走過與 C 相隔的距離 d，所需時間為

$$t_1 = \frac{d}{3u/4} = \frac{4d}{3u}.$$

在這段時間內，A 移動了 $\frac{u}{4}\cdot\frac{4d}{3u} = \frac{d}{3}$。所以 A 位於 $\frac{d}{3}$，而 B 位於 d：兩者相距 $\frac{2d}{3}$。

追趕。現在 A 以 $\frac{u}{4} = \frac{16u}{64}$ 運動，而 B 以 $\frac{3u}{64}$ 運動，所以 A 以相對速率 $\frac{13u}{64}$ 拉近距離。所需時間為

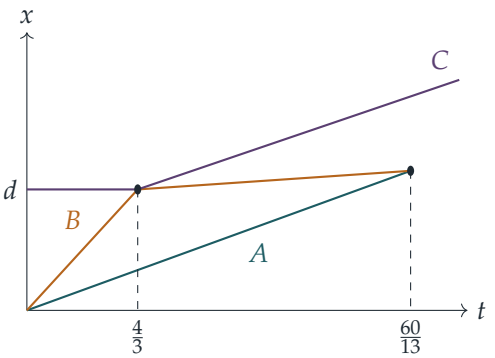
$$t_2 = \frac{2d/3}{13u/64} = \frac{128d}{39u}.$$

總時間。兩次 A–B 碰撞之間相隔的時間為

$$t_1 + t_2 = \frac{4d}{3u} + \frac{128d}{39u} = \frac{52d + 128d}{39u} = \frac{180d}{39u} = \frac{60d}{13u},$$

正如所求。

下面的距離–時間圖顯示了整個運動過程，其中 $u = d = 1$。代表 A 和 B 的兩條線在 $t = \frac{60}{13}$ 再次相交。



驗算

- 動量：取 $k = 1$，第一次碰撞後 $m\cdot\frac{u}{4} + m\cdot\frac{3u}{4} = mu$，第二次碰撞後 $m\cdot\frac{3u}{64} + 3m\cdot\frac{15u}{64} = \frac{48}{64}mu = m\cdot\frac{3u}{4}$。兩者均平衡。
- 邊界 $k = \frac{3}{2}$：v_A 和 w_B 都等於 $\frac{u}{10}$，這印證了臨界值。
- 合理性檢查：當 k 很大時，A 向後反彈（$v_A < 0$），而 B 繼續向前，所以顯然沒有第二次碰撞。這與所得範圍吻合。
- 我們以數值方法驗證過：對 10^5 個隨機有理數 k，$v_A > w_B$ 成立當且僅當 $k < \frac{3}{2}$；另外，取 $u = d = 1$ 作逐步時間模擬，得出第二次碰撞發生於 $t \approx 4.6154$，與 $\frac{60}{13} \approx 4.6154$ 相符。

常見錯誤

- 在恢復定律中使用速率而非帶正負號的速度。使用帶正負號的速度時，分離速率就是「前者減後者」，而 v_A 的正負號自然會得到妥善處理。
- 把 $v_A > 0$ 當作條件的一部分。原則上 A 可以向後運動而仍被 B 追上（若 $w_B < v_A$）。唯一的條件 $v_A > w_B$ 才是正確的條件。
- 在第 (ii) 部分，由第一次碰撞起計算追趕時間，而不是由 B 的速度改變的一刻起計算，因而漏掉了 $\frac{d}{3}$ 這段 A 早已走過的領先距離。

STEP 之外

動量守恆與恢復定律合起來，使每一次碰撞都成為由碰撞前速度到碰撞後速度的線性映射（linear map）。一連串的碰撞，例如牛頓擺（Newton's cradle），或是計算兩個方塊與一面牆之間碰撞次數的著名問題，便可透過複合這些映射來研究。在大學一年級的力學中，這會引伸至質心參考系（centre-of-mass frame），在其中恢復定律變成相對速度的簡單縮放，並進一步推展至二維和三維的碰撞。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）對碰撞和質心參考系有清晰的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。