詳細解答

STEP II 2006，第 1 題

純數學 • 周期性遞推關係

> **STEP II 2006，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q1

關鍵思路

由於每一項都決定了下一項，只要 $u_{p+1} = u_1 = 2$，數列（sequence）便會以週期（period）p 重複。因此 (i) 的每一部分，歸根究底都是把頭幾項寫成 k 的函數，然後解一條多項式方程。週期為 4 的方程必定包含週期 1 和週期 2 的答案作為因式（週期為 1 或 2 的數列同樣滿足 $u_5 = u_1$），事先知道這一點，因式分解（factorisation）便輕而易舉。第 (ii) 部分是一行便可完成的歸納法（induction），之後再用慣常的「在遞推關係（recurrence）中令 $n \to \infty$」的論證。

解答

第 (i) 部分

設 $f(u) = k - \dfrac{36}{u}$，則 $u_{n+1} = f(u_n)$。若 $u_{p+1} = u_1$，則反覆應用 f 可得 $u_{p+2} = u_2$、$u_{p+3} = u_3$，如此類推，所以對每個 n 都有 $u_{n+p} = u_n$。反過來說，週期為 p 當然需要 $u_{p+1} = u_1 = 2$。因此，數列的週期恰好為 p，當且僅當 $u_{p+1} = 2$（而且各項均有定義，即永不為 0），並且沒有更小的週期符合條件。

(a) 數列為常數數列，當且僅當 $u_2 = 2$，即 $k - 18 = 2$。所以 $k = 20$。

(b) 我們有 $u_2 = k - 18$，以及

$$u_3 = k - \frac{36}{k - 18} \qquad (k \neq 18).$$

令 $u_3 = 2$，得 $(k-2)(k-18) = 36$，所以 $k^2 - 20k = 0$，即 $k = 0$ 或 $k = 20$。$k = 20$ 給出常數數列，其週期為 1，而不是 2。當 $k = 0$ 時，數列為 2, −18, 2, −18, ...，週期確

實是 2。所以 $k = 0$。

(c) 我們還需要多計兩項。當 $k \neq 18$ 時，

$$u_3 = \frac{k(k-18)-36}{k-18} = \frac{k^2-18k-36}{k-18},$$

然後，只要 $k^2 - 18k - 36 \neq 0$，便有

$$u_4 = k - \frac{36(k-18)}{k^2-18k-36} = \frac{k^3-18k^2-72k+648}{k^2-18k-36}.$$

條件 $u_5 = 2$ 表示 $k - 36/u_4 = 2$，即 $u_4 = \dfrac{36}{k-2}$（這裏需要 $k \neq 2$；若 $k = 2$，則 $36/u_4 = 0$，這是不可能的）。交叉相乘，得

$$(k-2)(k^3-18k^2-72k+648) = 36(k^2-18k-36).$$

展開後把所有項移到左邊，

$$k^4-20k^3-36k^2+792k-1296 = 36k^2-648k-1296,$$
$$k^4-20k^3-72k^2+1440k = 0.$$

> **想一想** 怎樣才可以不必反覆試驗，就把這樣的四次多項式（quartic）分解因式？

動手之前，我們已經知道其中兩個根。任何週期為 1 或 2 的數列同樣滿足 $u_5 = u_1$，所以 $k = 20$ 和 $k = 0$ 必定是根。先抽出 k，再抽出 $k - 20$，

$$k^4-20k^3-72k^2+1440k = k(k-20)(k^2-72).$$

所以 $k \in \{0, 20, 6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}\}$。0 和 20 分別給出週期 2 和 1，所以新的值是 $k = \pm 6\sqrt{2}$。最後，我們利用 $k^2 = 72$，驗證當 $k = \pm 6\sqrt{2}$ 時各項均有定義：

- $u_2 = k - 18 \neq 0$；
- u_3 的分子是 $k^2 - 18k - 36 = 36 - 18k$，由於 $k \neq 2$，它不等於零；
- u_4 的分子是 $k(k^2-72) - 18k^2 + 648 = -1296 + 648 = -648 \neq 0$；
- 按構造 $u_5 = 2$，而且 $k \neq 2$、$k \neq 18$，符合推導過程中的要求。

由於 $k \neq 0, 20$，週期不是 1 或 2；而一個滿足 $u_5 = u_1$ 的數列，若最小週期不是 1 或 2，其最小週期必定恰好是 4（最小週期必須整除 4）。所以數列的週期為 4，當且僅當 $k = \pm 6\sqrt{2}$。

第 (ii) 部分

取 $k = 37$。我們用歸納法證明 $u_n \geq 2$。當 $n = 1$ 時，由於 $u_1 = 2$，命題成立。若 $u_n \geq 2$，則 $u_n > 0$，所以 $0 < \dfrac{36}{u_n} \leq 18$，因此

$$u_{n+1} = 37 - \frac{36}{u_n} \geq 37 - 18 = 19 \geq 2.$$

所以對所有 n 都有 $u_n \geq 2$，這正是我們要證明的。（事實上，對所有 $n \geq 2$ 都有 $u_n \geq 19$。）

> **想一想** 極限 (limit) 所滿足的方程有兩個根。哪一個才是正確的？又為甚麼可以在遞推關係中令 $n \to \infty$？

由於 $u_n \to \ell$ 而且每個 $u_n \geq 2$，我們有 $\ell \geq 2$；特別地，$\ell \neq 0$，所以 $36/u_n \to 36/\ell$。在 $u_{n+1} = 37 - 36/u_n$ 的兩邊令 $n \to \infty$（左邊同樣趨向 ℓ），得

$$\ell = 37 - \frac{36}{\ell} \quad \Longrightarrow \quad \ell^2 - 37\ell + 36 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\ell - 1)(\ell - 36) = 0.$$

根 $\ell = 1$ 因 $\ell \geq 2$ 而被排除，所以

$$\ell = 36.$$

驗算

- 當 $k = 6\sqrt{2} \approx 8.485$ 時，各項為 2, −9.515, 12.269, 5.551, 2, . . . ；當 $k = -6\sqrt{2}$ 時，各項為 2, −26.485, −7.126, −3.433, 2, . . . 。兩者都在四步之後重複。
- 因式 $k^2 - 72$ 有一個簡潔的含義：映射 $u \mapsto (ku - 36)/u$ 對應矩陣 $\begin{pmatrix} k & -36 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，其跡 (trace) 為 k，行列式 (determinant) 為 36。它的特徵值 (eigenvalues) 是 $6e^{\pm i\theta}$，其中 $k = 12\cos\theta$；當 $\theta = \pi/4$ 或 $3\pi/4$ 時，它的四次方是單位矩陣 (identity) 的倍數。這給出 $k = \pm 6\sqrt{2}$，而 $\theta = \pi/2$ 則給出週期為 2 的 $k = 0$。
- 當 $k = 37$ 時：$u_2 = 19$、$u_3 \approx 35.105$、$u_4 \approx 35.975$、$u_5 \approx 35.9993$，各項明顯趨近 36，而不是 1。

常見錯誤

- 在 (b) 中答 $k = 0, 20$，或在 (c) 中把四個根全部寫上。題目問的是週期 2 和週期 4，而按這個意思，常數數列的週期並不是 2。
- 除了 $\ell = 36$ 之外，把 $\ell = 1$ 也當作答案。(ii) 前半部分得出的界 $u_n \geq 2$，正是用來排除它的。

▶ 令 $n \to \infty$ 時沒有指出 $\ell \neq 0$，而這是 $36/u_n \to 36/\ell$ 成立所必需的。

STEP 之外

映射 $u \mapsto (ku - 36)/u$ 是一個莫比烏斯變換（Möbius transformation），而這類映射的複合，對應 2×2 矩陣的乘法。這就是為甚麼週期性歸根究底取決於兩個特徵值之比是否單位根（root of unity）。當 $k = 37$ 時，兩個不動點（fixed points）1 和 36 的表現並不相同：36 會吸引附近的項，而 1 則會排斥它們，這一點可以從 $|f'(\ell)| = 36/\ell^2$ 看出。這是不動點迭代（fixed-point iteration）和數列收斂（convergence）理論的起點，Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析學入門教材）對此有嚴格的論述。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以幾何直觀講解複分析）中，有一章精彩地講述莫比烏斯變換及其分類。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。