詳細解答

STEP I 2006，第 9 題

力學 • 連接質點

STEP I 2006，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/06-s1-q9

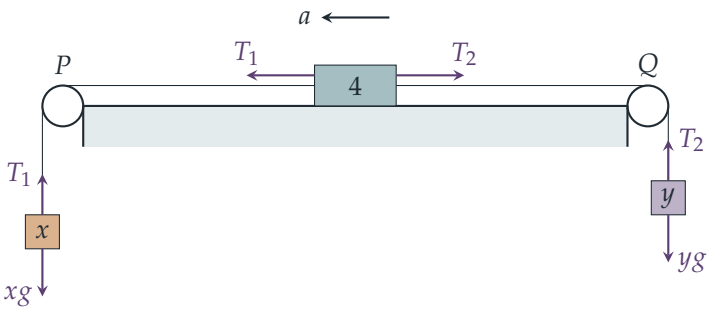
關鍵思路

整個運動分為兩個階段，每個階段的加速度都是常數。兩條繩子都連着的時候，三個物體組成的系統作為一個整體運動，由兩個懸掛重物的重量之差驅動。繩子剪斷之後，只有較輕的質點拉着方塊，而且拉力與運動方向相反，所以方塊作勻減速運動。剪斷一刻的速率把兩個階段連接起來，而約束條件（constraint）$x + y = 6$ 讓我們可以把一切都用 y 表示。

解答

模型

我們把方塊和兩個懸掛的物體都視為質點（particle），繩子視為輕而不可伸長（light and inextensible），桌面和滑輪（pulley）視為光滑（smooth）。由於 $x > y$，方塊向 P 移動，質量為 x 的質點下降，質量為 y 的質點上升。設跨過 P 和 Q 的繩子的張力（tension）分別為 T_1 和 T_2。



第一階段：兩條繩子都連着

設共同的加速度為 a_1（方塊向 P，質點 x 向下，質點 y 向上）。對每個物體應用牛頓第二定律（Newton's second law），得

$$\begin{aligned} xg - T_1 &= xa_1, \\ T_1 - T_2 &= 4a_1, \\ T_2 - yg &= ya_1. \end{aligned}$$

三式相加便消去張力：

$$(x-y)g = (x+y+4)a_1 = 10a_1, \qquad \text{所以} \qquad a_1 = \frac{(x-y)g}{10} = \frac{(6-2y)g}{10},$$

其中用了 $x = 6-y$。這個值是正數，因為 $y < x$ 表示 $y < 3$。

方塊由靜止出發，以恆定加速度運動，在時間 t_1 內走過距離 d，並達到速率 V，其中

$$d = \tfrac{1}{2}a_1 t_1^2, \qquad V^2 = 2a_1 d.$$

因此

$$t_1 = \sqrt{\frac{2d}{a_1}} = \sqrt{\frac{20d}{(6-2y)g}} = \sqrt{\frac{d}{5g}}\,\frac{10}{\sqrt{6-2y}}, \qquad V = \sqrt{\frac{(6-2y)gd}{5}}.$$

第二階段：剪斷之後

現在 $T_1 = 0$。方塊仍然以速率 V 向 P 移動，質量為 y 的質點也仍然以速率 V 上升。只有跨過 Q 的繩子作用於方塊，並把它拉回 Q 的方向。設減速度（deceleration）為 a_2。於是

$$\begin{aligned} T_2 &= 4a_2 \quad \text{（方塊）}, \\ yg - T_2 &= ya_2 \quad \text{（質點 } y\text{，上升時減速）}, \end{aligned}$$

所以

$$a_2 = \frac{yg}{4+y}.$$

? **想一想** 我們怎樣知道跨過 Q 的繩子在剪斷之後仍然保持拉緊？

假如繩子鬆弛了，質點便會以 g 減速，而方塊則會保持原有速率。繩子拉緊時，張力為 $T_2 = 4a_2 = 4yg/(4+y) > 0$，並無矛盾，而且共同的減速度 a_2 小於 g。所以繩子確實保持拉緊，方塊和質點一起運動，直至停下為止。

方塊再經過以下時間便會靜止：

$$t_2 = \frac{V}{a_2} = \sqrt{\frac{(6-2y)gd}{5}} \cdot \frac{4+y}{yg}$$
$$= \sqrt{\frac{d}{5g}}\,\sqrt{6-2y}\,\left(1+\frac{4}{y}\right),$$

其中我們用了 $\sqrt{(6-2y)gd/5}\,/\,g = \sqrt{d/(5g)}\sqrt{6-2y}$ 和 $(4+y)/y = 1+4/y$。

總時間

方塊在第二階段結束時首次回復靜止，所以總時間為

$$t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{d}{5g}}\left[\frac{10}{\sqrt{6-2y}} + \left(1+\frac{4}{y}\right)\sqrt{6-2y}\right] = \sqrt{\frac{d}{5g}}\,\mathrm{f}(y),$$

正是所求。

f 的駐值

符合物理情況的範圍是 $0 < y < 3$。設 $u = 6-2y$，則 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y = -2$，而

$$\mathrm{f}(y) = 10u^{-1/2} + \left(1+\frac{4}{y}\right)u^{1/2}.$$

求導，並對第二項使用積法則（product rule），得

$$\mathrm{f}'(y) = 10\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)u^{-3/2}(-2) - \frac{4}{y^2}u^{1/2} + \left(1+\frac{4}{y}\right)\tfrac{1}{2}u^{-1/2}(-2)$$
$$= \frac{10}{u^{3/2}} - \frac{4u^{1/2}}{y^2} - \frac{y+4}{y\,u^{1/2}}.$$

兩邊乘以 $y^2u^{3/2}$（在 $0<y<3$ 時為正數），條件 $\mathrm{f}'(y)=0$ 便化為

$$10y^2 - 4u^2 - (y^2+4y)u = 0.$$

代入 $u = 6-2y$：

$$10y^2 - 4(36-24y+4y^2) - (6y^2 - 2y^3 + 24y - 8y^2) = 0$$
$$2y^3 - 4y^2 + 72y - 144 = 0$$
$$2(y-2)(y^2+36) = 0.$$

由於 $y^2+36>0$，唯一的解是

$$y = 2,$$

它位於 $0<y<3$ 之內（並給出 $x=4$）。

因為當 $y\to 0^+$ 和 $y\to 3^-$ 時 $\mathrm{f}(y)\to\infty$，這個唯一的駐點（stationary point）就是極小值：$\mathrm{f}(2) = 10/\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$，所以回復靜止所需的最短時間是 $8\sqrt{2d/(5g)}$。

驗算

- 以數值方法逐步模擬運動（時間步長 $2 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$），隨機選取 $y \in (0,3)$ 和 d，所得結果與 $\sqrt{d/(5g)}\,\mathrm{f}(y)$ 吻合至五位有效數字；例如取 $y = 1.671$、$d = 0.581$，並用 $g = 9.8$，兩種方法都得出 $1.27096\,\mathrm{s}$。
- f 的數值導數在 $(0,3)$ 上恰好變號一次，就在 $y = 2$，而 $\mathrm{f}(2) = 11.3137\ldots = 8\sqrt{2}$。
- 極限情況合乎情理：當 $y \to 3$ 時，兩邊的質量幾乎平衡，$a_1 \to 0$，第一階段需時無限長；當 $y \to 0$ 時，剪斷之後沒有任何東西令方塊減速，所以第二階段需時無限長。

常見錯誤

- 在第二階段使用質量 $4 + x + y$：繩子一經剪斷，質量為 x 的質點便不再屬於這個系統。
- 忘記質量為 y 的質點在剪斷之後仍以速率 V 向上運動，因而把第二階段當作由靜止開始。
- 對 $\sqrt{6 - 2y}$ 求導時漏掉 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y = -2$。

STEP 之外

把運動分成若干階段，再以速度的連續性把它們連接起來，正是分段定義的動力學（piecewise-defined dynamics）背後的基本想法；這個想法會在衝力（impulsive forces）以及控制問題中再次出現，後者研究的是某個力何時開啟、何時關閉。問哪一個 y 值令時間最短，則是初嘗力學中的最優化（optimisation），日後會發展成變分法（calculus of variations），最速降線（brachistochrone）就是經典例子。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對連接體和約束力有仔細的討論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。