詳細解答

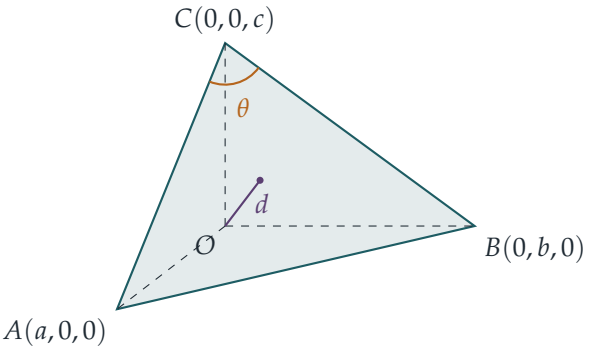
STEP I 2006，第 8 題

純數學 • 三維向量

> **STEP I 2006，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q8

關鍵思路

四面體（tetrahedron）$OABC$ 在 O 處有三條互相垂直的棱，所以若以 OAB 為底，體積便很容易求出。同一個立體亦可以看成以 ABC 為底，這時的高正好就是我們要求的距離 d。用兩種方法計算體積，便得到一條關於 d 的方程，前提是我們知道 ABC 的面積。這個面積可由 C 處的角求得，而該角則由純量積（scalar product）給出。



解答

第 (i) 部分

取位於平面 $z = 0$ 上的三角形 OAB 為底。由於 OA 和 OB 分別沿 x 軸和 y 軸，角 AOB 是直角，所以

$$\text{面積} OAB = \tfrac{1}{2}ab.$$

高是 C 到平面 $z=0$ 的距離，即 c，因為 OC 沿 z 軸，故與該平面垂直。因此

$$V = \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{2}ab \times c = \frac{abc}{6}.$$

第 (ii) 部分

角 ACB 是向量（vector）$\overrightarrow{CA}$ 與 $\overrightarrow{CB}$ 之間的夾角：

$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -c \end{pmatrix}.$$

它們的純量積是 $0+0+c^2 = c^2$，而長度分別是 $\sqrt{a^2+c^2}$ 和 $\sqrt{b^2+c^2}$。所以

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\,|\overrightarrow{CB}|} = \frac{c^2}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}},$$

這就是所要求的結果。

要求面積，我們需要 $\sin\theta$。由於 $0<\theta<\pi$，$\sin\theta>0$，所以

$$\begin{aligned}\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} &= \sqrt{\frac{(a^2+c^2)(b^2+c^2)-c^4}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}},\end{aligned}$$

因為展開 $(a^2+c^2)(b^2+c^2)$ 後，c^4 項互相抵消。

> ? **想一想** 哪一條三角形面積公式切合我們現有的資料？

我們知道兩條邊 CA 和 CB，以及它們之間的夾角 θ，所以使用 $\frac{1}{2}CA\cdot CB\sin\theta$。那些麻煩的平方根剛好約去：

$$\text{面積}ABC = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\cdot\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

令人欣喜的是，答案對 a、b、c 是對稱的，而這也是必然的：三角形 ABC 並不在乎我們把哪一個頂點稱為 C。

距離 d

現在把 ABC 看成同一個四面體的底。它的高是對面的頂點 O 到 ABC 所在平面的垂直距離，即 d。由於體積與我們選哪一個面作底無關，由第 (i) 部分和第 (ii) 部分可得

$$\frac{abc}{6} = \tfrac{1}{3}\times\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\times d, \qquad \text{所以} \qquad d = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}.$$

兩邊平方後取倒數（各項均為正數），

$$\frac{1}{d^2} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

其中分子的每一項都除以 $a^2b^2c^2$。這就是所要求的結果。

驗算

- 取 $a = b = c = 1$。這時 ABC 是邊長為 $\sqrt{2}$ 的等邊三角形，面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$，與 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 吻合。該平面是 $x + y + z = 1$，與 O 的距離為 $1/\sqrt{3}$，而確實有 $1/d^2 = 3$。
- 取 $a = 1$、$b = c = 2$，由公式得體積為 $\frac{2}{3}$，面積為 $\sqrt{6} \approx 2.449$，以及 $d = 2/\sqrt{6} \approx 0.8165$，所以 $1/d^2 = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$。
- 數值驗證：隨機選取 10 000 組 (a, b, c)，體積（用純量三重積（scalar triple product）計算）、面積（用向量積（cross product）計算）和 d（直接找出垂足的位置來計算）全部與公式吻合，誤差在 10^{-12} 以內。

常見錯誤

- 把 $\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{CB}$ 配搭使用：方向混亂會令純量積的正負號顛倒，得出的是 θ 的補角。
- 忘記了以 ABC 為底時，高是由 O 到該平面的垂線，而不是任何一條棱的長度。

STEP 之外

通過 A、B、C 的平面是 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$，其法向量(normal)為 $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$，利用一般的點到平面距離公式，一行便可求出 d。面積的結果是三維的畢氏定理(Pythagoras' theorem)，即德古阿定理（de Gua's theorem）：ABC 面積的平方，等於在 O 處三個直角面的面積平方之和，因為 $\frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$ 正好就是這個和。這兩個想法都源自向量積和行列式（determinant），在大學第一門線性代數（linear algebra）課程的初段便會學到；Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門教科書）是認識它們的好地方。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。