詳細解答

STEP I 2006，第 7 題

純數學 • 含絕對值符號的積分

> **STEP I 2006，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q7

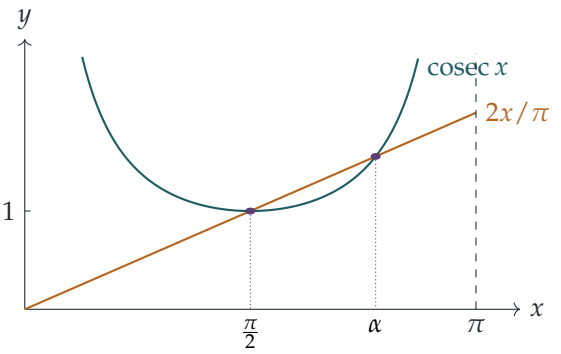
關鍵思路

把 $x\sin x = \pi/2$ 兩邊除以 $\frac{\pi}{2}\sin x$（它在 $(0,\pi)$ 上為正），方程便化為 $\operatorname{cosec} x = 2x/\pi$，所以方程的根（root）就是一條直線與一條 U 形曲線相交之處，而一條直線與一條凸（convex）曲線最多只能相交兩次。至於積分，處理絕對值（modulus）的全部竅門，就是找出絕對值符號內的式子在何處變號，在該處把積分範圍分開，然後以正確的正負號對每一段分別積分。

解答

第 (i) 部分：草圖與根

在 $0 < x < \pi$ 上，$\operatorname{cosec} x$ 在兩端均趨向 $+\infty$，關於 $x = \pi/2$ 對稱，並在該處取得最小值 1。直線 $y = 2x/\pi$ 由 $(0,0)$ 伸延至 $(\pi,2)$，並通過 cosec 曲線的最低點 $(\pi/2,1)$。



由於在 $(0,\pi)$ 上 $\sin x > 0$，

$$x\sin x = \frac{\pi}{2} \iff \frac{1}{\sin x} = \frac{2x}{\pi},$$

所以方程的根就是草圖中各交點的 x 坐標。其中一個根一眼便可看出：$x = \pi/2$，因為 $\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$。

為了確定恰好有兩個根，設 $h(x) = \operatorname{cosec} x - 2x/\pi$。那麼

$$h''(x) = \operatorname{cosec} x\,(\operatorname{cosec}^2 x + \cot^2 x) > 0 \quad \text{於}(0,\pi),$$

所以 h 是嚴格凸（strictly convex）的，而嚴格凸函數最多只有兩個零點。（假如它有三個零點 $a < b < c$，那麼 b 嚴格地位於 a 與 c 之間，但 $h(b)$ 卻落在連接 $(a,0)$ 與 $(c,0)$ 的弦（chord）上，而不是嚴格地在弦的下方。）現在 $h'(\pi/2) = -\cot\frac{\pi}{2}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} = -\frac{2}{\pi} < 0$，所以 h 在 $\pi/2$ 的右側附近為負，而當 $x \to \pi^-$ 時 $h(x) \to +\infty$。根據連續性（continuity），h 有一個零點 α，滿足 $\pi/2 < \alpha < \pi$。因此方程恰好有兩個根，即 $\pi/2$ 和 α，而 α 是較大的一個。

第 (i) 部分：積分

由草圖（以及上述關於凸性的論證）可知，cosec 曲線在兩個根之間位於直線下方，而在 α 之後則位於直線上方。把 $\operatorname{cosec} x \leqslant 2x/\pi$ 乘以正數 $\frac{\pi}{2}\sin x$，即得

$$x\sin x - \frac{\pi}{2} \geq 0 \text{ 於 } \left[\tfrac{\pi}{2},\alpha\right], \qquad x\sin x - \frac{\pi}{2} \leq 0 \text{ 於} [\alpha,\pi].$$

想一想 我們應怎樣處理絕對值符號？

我們在變號之處 α 把積分分開，而在第二段上則對該式子的相反數積分。

運用分部積分法（integration by parts），取 $u = x$，$\mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x$，

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x - x\cos x.$$

所以 $x\sin x - \pi/2$ 的一個原函數（antiderivative）是

$$F(x) = \sin x - x\cos x - \frac{\pi x}{2},$$

而所求的積分是

$$I = [F(x)]_{\pi/2}^{\alpha} - [F(x)]_{\alpha}^{\pi} = 2F(\alpha) - F\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - F(\pi).$$

這三個值分別是

$$F(\alpha) = \sin\alpha - \alpha\cos\alpha - \frac{\alpha\pi}{2},$$

$$F\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 - \frac{\pi^2}{4},$$

$$F(\pi) = 0 - \pi(-1) - \frac{\pi^2}{2} = \pi - \frac{\pi^2}{2}.$$

因此

$$I = 2\sin\alpha - 2\alpha\cos\alpha - \alpha\pi - 1 + \frac{\pi^2}{4} - \pi + \frac{\pi^2}{2}$$
$$= 2\sin\alpha + \frac{3\pi^2}{4} - \alpha\pi - \pi - 2\alpha\cos\alpha - 1,$$

這正是所要求的結果。

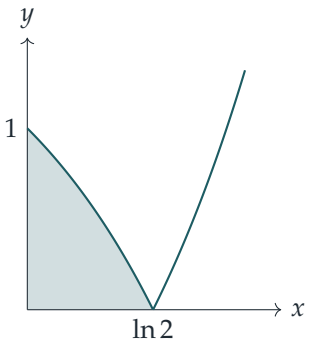
第 (ii) 部分

? **想一想** 兩個絕對值符號之中，哪一個在這裏才真正起作用？

在正 x 軸上，$x \geq 0$，所以 $\mathrm{e}^x \geq 1$，內層的絕對值符號並無影響：$|\mathrm{e}^x - 1| = \mathrm{e}^x - 1$。因此曲線就是

$$y = |\mathrm{e}^x - 2| \qquad (x \geq 0).$$

當 $0 \leq x \leq \ln 2$ 時，它等於 $2 - \mathrm{e}^x$，由 $x = 0$ 處的 $y = 1$ 下降至 $x = \ln 2$ 處的 $y = 0$；當 $x \geq \ln 2$ 時，它等於 $\mathrm{e}^x - 2$，無止境地上升。



所以曲線只在 $x = \ln 2$ 處觸及 x 軸，而由正 x 軸、y 軸和曲線所圍成的區域，就只有 $0 \leq x \leq \ln 2$ 上的陰影部分（過了 $\ln 2$ 之後，曲線一直向上攀升，再圍不成任何封閉區域）。它的面積是

$$\int_0^{\ln 2} (2 - \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \Big[2x - \mathrm{e}^x\Big]_0^{\ln 2} = (2\ln 2 - 2) - (0 - 1)$$
$$= 2\ln 2 - 1 = \ln 4 - 1,$$

正如所求。

驗算

用二分法（bisection）可得 $\alpha \approx 2.4433$，代入 (i) 的公式後得出約 0.61343；把森遜法則（Simpson's rule）直接應用於 $[\pi/2, \pi]$ 上的 $|x\sin x - \pi/2|$，所得的值在小數點後 14 位

以內完全相同。在 $(0, \pi)$ 上作格點搜尋（grid search），發現 $x \sin x - \pi/2$ 恰好變號兩次，分別在 1.5708 和 2.4433 附近。在 (ii) 中，$\ln 4 - 1 \approx 0.38629$，同樣與數值積分的結果吻合。作為對 (i) 中正負號的合理性檢查，答案必須為正，而它確實為正。

常見錯誤

- 沒有在 α 處分開，便直接在整個 $[\pi/2, \pi]$ 上對 $x \sin x - \pi/2$ 積分：這樣得出的是有向面積（signed area）（這裏是負數），而不是絕對值的積分。
- 遺漏了 $x = \pi/2$ 這個根，因為直線剛好通過 cosec 曲線的最低點，圖形看起來可能像是相切。其實並非相切：曲線在該處的斜率是 0，而直線的斜率是 $2/\pi$，所以兩者是相交而過的。
- 在 (ii) 中，把兩個絕對值符號都保留下來，結果分出過多的情況。應先利用 $x \geq 0$ 確定 $\mathrm{e}^x - 1$ 的正負號。

STEP 之外

根 α 沒有閉合形式（closed form），但我們仍然可以用它把積分準確地表達出來：這是分析學（analysis）中常見的情況，即一個量是由一條方程而非一條公式所確定的。嚴格凸函數與一條直線最多相交兩次，這只是凸性眾多精妙推論之一；凸性也是延森不等式（Jensen's inequality）以及最優化（optimisation）中許多理論的基礎。Bartle 與 Sherbert 合著的 *Introduction to Real Analysis*（實分析入門）對連續性、介值定理（intermediate value theorem）和凸函數都有嚴謹細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。