詳細解答

STEP I 2006，第 6 題

純數學 • 佩爾方程的變換

> **STEP I 2006，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q6

關鍵思路

每一部分都在問：某個線性坐標變換（linear change of coordinates）會否保持一個二次式（quadratic expression）不變。直接的做法是代入、展開，然後比較 a^2、ab 和 b^2 的係數（coefficients）。背後其實有一幅更簡潔的圖像：$x^2 - 2y^2$ 是數 $x + y\sqrt{2}$ 的「大小」，而乘以 $3 + 2\sqrt{2}$（其大小為 $9 - 8 = 1$）不會改變這個大小。看通這一點，你就確切知道 (iii) 中的映射（map）該如何構造。

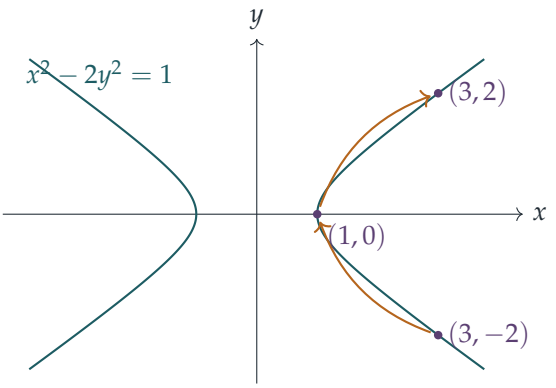
解答

第 (i) 部分

設 $a^2 - 2b^2 = 1$。則

$$\begin{aligned}(3a + 4b)^2 - 2(2a + 3b)^2 &= (9a^2 + 24ab + 16b^2) - 2(4a^2 + 12ab + 9b^2) \\ &= a^2 - 2b^2 \\ &= 1,\end{aligned}$$

所以 $(3a + 4b,\ 2a + 3b)$ 位於 $x^2 - 2y^2 = 1$ 上，正如所求。事實上，頭兩行是一條恆等式（identity），對任何 a 和 b 都成立：這個映射在每一處都保持 $x^2 - 2y^2$ 不變，而不僅是在曲線上。



這個映射把點沿着右邊的分支推移：$(3,-2) \mapsto (1,0) \mapsto (3,2) \mapsto (17,12) \mapsto \cdots$。

第 (ii) 部分

設 $Ma^2 - Nb^2 = 1$。展開得

$$M(5a+6b)^2 - N(4a+5b)^2 = (25M-16N)a^2 + (60M-40N)ab + (36M-25N)b^2.$$

像點位於曲線上，當且僅當上式等於 $1 = Ma^2 - Nb^2$。減去 $Ma^2 - Nb^2$ 後，條件變成

$$\begin{aligned} 0 &= (24M-16N)a^2 + (60M-40N)ab + (36M-24N)b^2 \\ &= 4(3M-2N)(2a^2+5ab+3b^2) \\ &= 4(3M-2N)(2a+3b)(a+b). \end{aligned}$$

? **想一想** 我們真的需要 $3M = 2N$ 嗎？會不會是其他因式等於零？

這個條件必須對曲線上每一點都成立。當 $M, N > 0$ 時，曲線 $Mx^2 - Ny^2 = 1$ 是一條雙曲線（hyperbola），上面有無窮多個點。直線 $2x + 3y = 0$ 和 $x + y = 0$ 各自與它最多相交於兩點，所以曲線上絕大部分的點都滿足 $(2a+3b)(a+b) \neq 0$。因此我們需要 $3M - 2N = 0$。反過來說，若 $3M = 2N$，條件在每一點都成立。

所以 $3M = 2N$。於是 $2 \mid 3M$，故 M 是偶數。最小的選擇是 $M = 2$，由此得 $N = 3$。最後驗算一次：

$$2(5a+6b)^2 - 3(4a+5b)^2 = (50-48)a^2 + (120-120)ab + (72-75)b^2 = 2a^2 - 3b^2.$$

最小的正整數是 $M = 2$ 和 $N = 3$。

第 (iii) 部分

我們要找正整數，使得

$$(Pa+Qb)^2 - 3(Ra+Sb)^2 = a^2 - 3b^2 \quad \text{對任意} a, b,$$

這樣必定能令曲線上每一點的像都位於曲線上。比較係數：

$$P^2 - 3R^2 = 1, \qquad PQ = 3RS, \qquad Q^2 - 3S^2 = -3.$$

第一條方程要求在 $x^2 - 3y^2 = 1$ 上找一個正整數點 (P, R)。最小的是 $(2,1)$，所以試取 $P = 2$，$R = 1$。第二條方程隨即給出 $Q = \frac{3}{2}S$，而第三條變成 $\frac{9}{4}S^2 - 3S^2 = -3$，即 $S^2 = 4$。所以 $S = 2$ 而 $Q = 3$：

$$P = 2, \quad Q = 3, \quad R = 1, \quad S = 2.$$

驗算：$(2a + 3b)^2 - 3(a + 2b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2 - 3a^2 - 12ab - 12b^2 = a^2 - 3b^2 = 1$。所以 $(2a + 3b,\ a + 2b)$ 位於 $x^2 - 3y^2 = 1$ 上。

想一想 這樣的映射是從哪裏來的？

寫出 $(a + b\sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = (2a + 3b) + (a + 2b)\sqrt{3}$。$x + y\sqrt{3}$ 的範數（norm）$x^2 - 3y^2$ 具有積性（multiplicative），而 $2 + \sqrt{3}$ 的範數是 $4 - 3 = 1$，所以乘以它會保持範數不變。第 (i) 部分的原理相同，用的是 $3 + 2\sqrt{2}$。至於 (ii)，$(a\sqrt{2} + b\sqrt{3})(5 + 2\sqrt{6}) = (5a + 6b)\sqrt{2} + (4a + 5b)\sqrt{3}$，這就是 $2x^2 - 3y^2$ 這個形式在那裏出現的原因。(iii) 還有其他正確答案：乘以 $(2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$ 會得出 $(7a + 12b,\ 4a + 7b)$。

驗算

- 從 $x^2 - 3y^2 = 1$ 上的 $(1,0)$ 出發。重複施行 (iii) 的映射得出 $(2,1)$、$(7,4)$、$(26,15)$、$(97,56)$，每一個都滿足 $x^2 - 3y^2 = 1$（例如 $26^2 - 3 \cdot 15^2 = 676 - 675 = 1$）。
- 對於 (ii)，$(1/\sqrt{2}, 0)$ 在 $2x^2 - 3y^2 = 1$ 上，並映射到 $(5/\sqrt{2},\ 4/\sqrt{2})$。於是 $2 \cdot \frac{25}{2} - 3 \cdot \frac{16}{2} = 25 - 24 = 1$。
- 在 $1 \le M, N < 30$ 的範圍內作窮舉搜尋，並以每條雙曲線上的實際點來測試，證實 $(2,3)$ 是最小的可行數對。

常見錯誤

- 在 (ii) 中，只令 ab 的係數為零，卻沒有檢查 a^2 和 b^2 的係數是否隨之等於 M 和 $-N$。在這題中它們確實如此，但這一點必須寫出來證明。
- 沒有給出理由就說「恆等式必須對所有 a, b 成立」，而題目其實只給出曲線上的點。你需要一個論證，例如上面的因式分解（factorisation），來排除其他因式等於零的可能。

STEP 之外

這些都是佩爾方程（Pell equations）$x^2 - dy^2 = 1$。它們的整數解由環（ring）$\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 中一個基本單位（fundamental unit）$x_1 + y_1\sqrt{d}$ 的冪生成，而這裏的映射正是乘以這類單位。用矩陣的語言來說，每個映射都是一個保持某個二次型（quadratic form）不變的 2×2 整數矩陣，即某個「整正交羣」（integral orthogonal group）的元素。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）有精彩的一整章，以連分數（continued fractions）處理佩爾方程。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。