詳細解答

STEP I 2006，第 5 題

純數學 • 代換積分法

STEP I 2006，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/06-s1-q5

關鍵思路

兩個被積函數(integrand)都含有一個棘手的平方根，而要消去線性式的平方根，最乾淨利落的方法就是把整個根式設為新變量。根式一旦消失，剩下的便是有理函數（rational function），而有理函數總可以用部分分式（partial fractions）來積分。在第 (ii) 部分，最好先把指數函數除去，使平方根變成某個線性式的根，然後同一招便能派上用場。

解答

第 (i) 部分

由於 $x > 4$，我們有 $2x + 1 > 9$，故可取 $u = \sqrt{2x+1} > 3$。由 $u^2 = 2x + 1$ 得

$$2u\,\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x, \qquad \text{所以} \qquad \mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}u,$$

以及

$$x - 4 = \frac{u^2 - 1}{2} - 4 = \frac{u^2 - 9}{2}.$$

代入後，

$$\int \frac{3}{(x-4)\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{\frac{1}{2}(u^2-9)\,u}\,u\,\mathrm{d}u = \int \frac{6}{u^2-9}\,\mathrm{d}u.$$

來自 $\mathrm{d}x$ 的因子 u 恰好把平方根約去，這正是這個代換（substitution）奏效的原因。現在 $u^2 - 9 = (u-3)(u+3)$，而

$$\frac{6}{(u-3)(u+3)} = \frac{1}{u-3} - \frac{1}{u+3},$$

你可以把右邊通分來驗證：分子是 $(u+3)-(u-3)=6$。因此

$$\int \frac{6}{u^2-9}\,\mathrm{d}u = \ln(u-3)-\ln(u+3)+K = \ln\left(\frac{u-3}{u+3}\right)+K,$$

這裏無需加上絕對值符號，因為 $u>3$ 令 $u-3$ 和 $u+3$ 均為正數。把 $u=\sqrt{2x+1}$ 代回，得

$$\int \frac{3}{(x-4)\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{2x+1}+3}\right)+K,$$

正是所求。

第 (ii) 部分

設 I 為該積分。仿照第 (i) 部分，最自然的代換就是把平方根設為新變量：

$$w=\sqrt{\mathrm{e}^x+1}, \qquad w^2=\mathrm{e}^x+1.$$

於是 $2w\,\mathrm{d}w=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$，所以 $\mathrm{d}x=\dfrac{2w}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}w=\dfrac{2w}{w^2-1}\,\mathrm{d}w$。積分上下限變為

$$x=\ln 3:\ w=\sqrt{3+1}=2, \qquad x=\ln 8:\ w=\sqrt{8+1}=3.$$

因此

$$I=\int_2^3 \frac{2}{(w^2-1)\,w}\cdot\frac{2w}{w^2-1}\,\mathrm{d}w=\int_2^3\frac{4}{(w^2-1)^2}\,\mathrm{d}w.$$

? **想一想** 怎樣才能不經冗長的計算，就把 $\dfrac{4}{(w^2-1)^2}$ 分解成部分分式？

從簡單的分解式 $\dfrac{2}{w^2-1}=\dfrac{1}{w-1}-\dfrac{1}{w+1}$ 出發，把它平方：

$$\begin{aligned}\frac{4}{(w^2-1)^2} &= \frac{1}{(w-1)^2}-\frac{2}{(w-1)(w+1)}+\frac{1}{(w+1)^2}\\ &= \frac{1}{(w-1)^2}+\frac{1}{(w+1)^2}-\frac{1}{w-1}+\frac{1}{w+1},\end{aligned}$$

其中對中間一項再用了一次那個簡單的分解式。現在每一項都可以一眼看出積分：

$$\int\frac{4}{(w^2-1)^2}\,\mathrm{d}w=-\frac{1}{w-1}-\frac{1}{w+1}-\ln\left(\frac{w-1}{w+1}\right)+C,$$

由於在積分範圍內 $w\geq 2$，所以無需加上絕對值符號。代入上下限計算，

$$\begin{aligned}\text{當}w=3:&\quad -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}-\ln\tfrac{2}{4}=-\tfrac{3}{4}+\ln 2,\\ \text{當}w=2:&\quad -1-\tfrac{1}{3}-\ln\tfrac{1}{3}=-\tfrac{4}{3}+\ln 3.\end{aligned}$$

所以

$$I = \left(-\tfrac{3}{4} + \ln 2\right) - \left(-\tfrac{4}{3} + \ln 3\right) = \frac{7}{12} + \ln\frac{2}{3},$$

這就是要證明的結果。

你同樣可以分兩步來做：先設 $v = \mathrm{e}^x$（得出 $\int_3^8 \frac{2}{v^2\sqrt{v+1}}\,\mathrm{d}v$），然後設 $w^2 = v+1$；上面的單一代換則一次過完成了這兩步。

驗算

- 對 (i) 的答案求導：設 $u = \sqrt{2x+1}$，則 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}$，而 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\ln\frac{u-3}{u+3} = \frac{6}{u^2-9}$，所以導數為 $\frac{6}{u(u^2-9)} = \frac{3}{(x-4)\sqrt{2x+1}}$。
- 數值上，$\frac{7}{12} + \ln\frac{2}{3} \approx 0.58333 - 0.40547 = 0.17787$，而在 $[\ln 3, \ln 8]$ 上對原來的被積函數應用辛普森法則（Simpson's rule），得出 0.177868，兩者有六位數字吻合。
- 就正負號和大小作一個合理性檢查：(ii) 的被積函數為正，並在長度為 $\ln\frac{8}{3} \approx 0.98$ 的區間上由約 0.33 下降至約 0.08，所以答案略小於 0.2 正合預期。

常見錯誤

- 在 (ii) 中變換變量時忘記更改積分上下限，或把 x 的上下限代入以 w 表示的式子。
- 把 $\frac{4}{(w^2-1)^2}$ 只寫成 $\frac{A}{(w-1)^2} + \frac{B}{(w+1)^2}$：重複因子還需要線性項 $\frac{1}{w-1}$ 和 $\frac{1}{w+1}$。
- 在 (i) 中得出 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ 而不是 $\mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}u$，結果留下一個多餘的平方根。

STEP 之外

兩部分的答案都由對數和有理項組成，原因在於一條一般性的定理：每個有理函數都有初等原函數（elementary antiderivative），可藉部分分式由有理函數、對數和反正切函數（inverse tangent）構成；而任何關於 x 和 $\sqrt{ax+b}$ 的有理被積函數，經代換 $u^2 = ax+b$ 後都會變成有理函數。把這個想法推廣到二次式的根，便引出歐拉代換（Euler's substitutions）；而追問哪些積分不能以初等形式求出，則引出劉維爾（Liouville）的有限形式積分理論（integration in finite terms）。若想細緻地了解積分及其背後的道理，可閱讀 Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本實分析入門書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。