詳細解答

STEP I 2006，第 4 題

純數學 • 正多邊形的面積

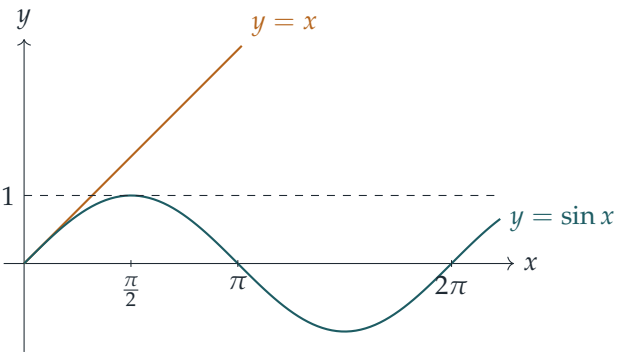
> **STEP I 2006，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q4

關鍵思路

直線 $y = x$ 是 $y = \sin x$ 在原點的切線（tangent），而正弦曲線向下彎離這條直線。單憑這一幅圖，就同時得到不等式和近似式。至於多邊形，把它分割成 n 個在中心相接的全等（congruent）等腰三角形；所有的量於是都變成半角 π/n 的三角運算，而不等式 $\sin x < x$ 原來正好決定了導數（derivative）的正負號。

解答

兩個圖像



兩條曲線都通過原點，而且在該處的斜率 (gradient) 都是 1，因為在 $x = 0$ 時 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x = 1$。所以 $y = x$ 是正弦曲線在 O 的切線。

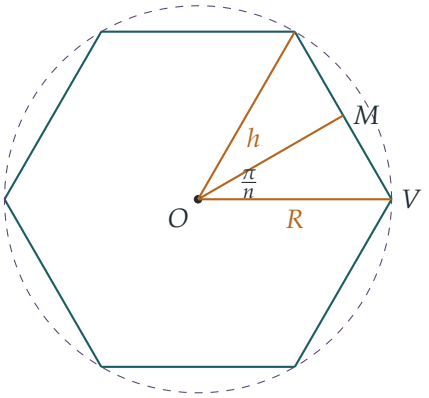
(i) 當 $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ 時，正弦曲線是凹的（concave）（$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sin x = -\sin x < 0$），所以它位於其在 O 的切線之下，由此得 $\sin x < x$。（等價的說法：$g(x) = x - \sin x$ 滿足

$g(0) = 0$，且當 $0 < x < 2\pi$ 時 $g'(x) = 1 - \cos x > 0$，所以 g 在該區間上嚴格遞增（strictly increasing）。當 $x > \frac{\pi}{2}$ 時，我們有 $\sin x \le 1 < \frac{\pi}{2} < x$。所以對所有 $x > 0$ 都有 $x > \sin x$。

(ii) 由於這條直線是在 O 的切線，兩個圖像在原點附近幾乎無法分辨：當 x 很小時，高度 $\sin x$ 與高度 x 非常接近，所以 $\dfrac{\sin x}{x} \approx 1$。（更精確的說法：由於當 $x > 0$ 時 $\sin x \ge x - \frac{x^3}{6}$，我們有 $1 - \frac{x^2}{6} \le \frac{\sin x}{x} < 1$。）

多邊形的面積

把多邊形的中心 O 與各頂點連起來。這樣就把多邊形分割成 n 個全等的等腰三角形，每個三角形的底等於一條邊 $s = P/n$，在 O 的頂角為 $2\pi/n$。從 O 作垂線至一條邊的中點 M；這條垂線平分頂角。



在直角三角形 OMV 中（其中 V 是一個頂點），在 O 的角是 π/n，且 $MV = \frac{1}{2}s$。所以由中心到一條邊的距離 $h = OM$ 是

$$h = \frac{s/2}{\tan(\pi/n)} = \frac{P}{2n\tan(\pi/n)}.$$

這 n 個三角形每個的面積都是 $\frac{1}{2}sh$，所以多邊形的面積是

$$A = n \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \frac{P}{n} \cdot \frac{P}{2n\tan(\pi/n)} = \frac{P^2}{4n\tan(\pi/n)},$$

正如所求。

面積隨 n 增加

固定 P，把面積寫成 $A = \dfrac{P^2}{4f(n)}$，其中 $f(n) = n\tan\dfrac{\pi}{n}$。由於當 $n \ge 3$ 時 $f(n) > 0$，A 遞增恰好等同於 f 遞減。根據積法則（product rule）和鏈式法則（chain rule），

$$f'(n) = \tan\frac{\pi}{n} + n\sec^2\frac{\pi}{n} \cdot \left(-\frac{\pi}{n^2}\right) = \tan\theta - \theta\sec^2\theta, \qquad \text{其中} \theta = \frac{\pi}{n}.$$

想一想 我們怎樣判斷 $\tan\theta - \theta\sec^2\theta$ 的正負號？

抽出正因子 $\sec^2\theta$，並利用 $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$：

$$f'(n) = \sec^2\theta\,(\sin\theta\cos\theta - \theta) = \tfrac{1}{2}\sec^2\theta\,(\sin 2\theta - 2\theta).$$

當 $n \geq 3$ 時，我們有 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}$，所以 $2\theta > 0$，由第 (i) 部分得 $\sin 2\theta < 2\theta$。因此 $f'(n) < 0$，並且

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}n} = -\frac{P^2 f'(n)}{4f(n)^2} > 0.$$

所以，在周界（perimeter）固定的情況下，面積隨 n 增加而增加。

與外接圓比較

包含這個多邊形的最小的圓是外接圓（circumcircle），它以 O 為圓心，並通過所有頂點。要看出更小的圓都不行，設各頂點為 $V_1, \ldots, V_n$，其中 $\overrightarrow{OV_k} = \mathbf{v}_k$，$|\mathbf{v}_k| = R$。由對稱性可知 $\sum \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$，所以對任意一點 C，設 $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$，則有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |\mathbf{v}_k - \mathbf{c}|^2 = R^2 - \frac{2}{n}\,\mathbf{c}\cdot\sum_{k=1}^{n}\mathbf{v}_k + |\mathbf{c}|^2 = R^2 + |\mathbf{c}|^2 \geq R^2.$$

所以必有某個頂點與 C 的距離至少是 R，而以 C 為圓心並包含這個多邊形的圓，半徑至少是 R。外接圓半徑（circumradius）是 $R = OV$，而由同一個直角三角形可得

$$\tfrac{1}{2}s = R\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad R = \frac{P}{2n\sin\theta}.$$

所以兩個面積之比是

$$\frac{A}{\pi R^2} = \frac{P^2}{4n\tan\theta}\cdot\frac{4n^2\sin^2\theta}{\pi P^2} = \frac{n}{\pi}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\tan\theta} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\theta} = \frac{\sin 2\theta}{2\theta},$$

當中用到 $n/\pi = 1/\theta$。當 n 很大時，$2\theta = 2\pi/n$ 很小，所以由第 (ii) 部分可知這個比值約等於 1。

驗算

對於正方形（$n = 4$，$\theta = \pi/4$），公式給出 $A = P^2/16$，這是正確的，因為每條邊長 $P/4$；面積比是 $\sin(\pi/2)/(\pi/2) = 2/\pi \approx 0.637$，與單位圓內邊長為 $\sqrt{2}$ 的正方形吻合。對於六邊形，這個比值是 $3\sqrt{3}/(2\pi) \approx 0.827$。我們用鞋帶公式（shoelace formula）核對了 $n = 3, \ldots, 39$ 時的面積公式，用數值導數核對了 $f'(n) < 0$，並求得這個比值在 $n = 100$ 時是 0.99934，在 $n = 1000$ 時是 0.9999934。

常見錯誤

- 在直角三角形中用了整個頂角 $2\pi/n$，而不是半角 π/n。
- 對 $\tan(\pi/n)$ 求導時，漏掉鏈式法則帶來的因子 $-\pi/n^2$。
- 聲稱「因為 $\tan\theta \approx \theta$」，所以 $\tan\theta < \theta\sec^2\theta$：近似式不能決定正負號。能決定正負號的是精確的不等式 $\sin 2\theta < 2\theta$。

STEP 之外

極限（limit）$\sin x/x \to 1$ 正是令 $\sin x$ 的導數等於 $\cos x$ 的事實，而大學的第一門分析（analysis）課程會從 sin 的定義出發嚴格地證明它，而不是靠一幅圖。這個單調性（monotonicity）結果，讓我們從離散的角度一窺等周不等式（isoperimetric inequality）：在所有長度給定的閉曲線之中，圓所圍的面積最大，而多邊形的面積會遞增並趨向圓的面積值 $P^2/(4\pi)$。如想看極限和導數的嚴格論述，可以讀 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。