詳細解答

STEP I 2006，第 3 題

純數學 • 多項式的根

> **STEP I 2006，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q3

關鍵思路

着眼於圖像，而不是公式。一條曲線若起初在軸的下方，最後又必須到達軸的上方，就一定會穿過軸；而 $x = 0$ 處的值（即常數項）告訴你曲線在原點處位於軸的哪一側。對於三次函數（cubic），關鍵在於轉向點（turning point）：曲線與軸相交三次，當且僅當它的局部極大值（local maximum）在軸的上方，而局部極小值（local minimum）在軸的下方。

解答

第 (i) 部分

設 $f(x) = x^2 + bx + c$。其圖像是一條開口向上的拋物線（parabola），所以當 $x \to \pm\infty$ 時，$f(x) \to +\infty$。若 $c < 0$，則 $f(0) = c < 0$：曲線在 $x = 0$ 處位於軸的下方。

由於 f 連續（continuous），當 x 是絕對值很大的負數時取正值，而在 0 處取負值，所以它在 $(-\infty, 0)$ 內某處穿過軸。同理，它在 $(0, \infty)$ 內再穿過軸一次。這兩個根（root）分別位於 0 的兩側，所以它們並不相同。二次方程（quadratic）最多有兩個根，因此該方程恰好有兩個相異實根，一負一正。所以 $c < 0$ 是*充分*條件（sufficient condition）。

它並*非必要*條件（necessary condition）。例如，$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ 有相異實根 1 和 2，但 $c = 2 > 0$。（既必要又充分的條件是 $b^2 > 4c$；當 $c < 0$ 時，這個條件自動成立，因為 $b^2 \geq 0 > 4c$。）

第 (ii) 部分

我們斷言：該方程有兩個相異正根，當且僅當

$$b^2 > 4c, \qquad b < 0, \qquad c > 0.$$

必要性。假設兩根為 $\alpha \neq \beta$，其中 $\alpha, \beta > 0$。那麼 $x^2 + bx + c = (x - \alpha)(x - \beta)$，所以

$$c = \alpha\beta > 0, \qquad b = -(\alpha + \beta) < 0, \qquad b^2 - 4c = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2 > 0.$$

充分性。若 $b^2 > 4c$，則兩根 α, β 是相異實數。兩根之積為 $c > 0$，所以它們同號。兩根之和為 $-b > 0$，所以它們同為正數。

想一想 為甚麼單靠 $b < 0$ 和 $c > 0$ 並不足夠？

考慮 $x^2 - x + 1$：這裏 $b = -1 < 0$ 而 $c = 1 > 0$，但 $b^2 - 4c = -3 < 0$，所以根本沒有實根。從圖像來看，$c > 0$ 使曲線在 $x = 0$ 處位於軸的上方，而 $b < 0$ 使頂點（vertex）位於 $x = -\frac{b}{2} > 0$。我們還需要頂點位於軸的下方：頂點的高度是 $c - \frac{b^2}{4}$，它為負數當且僅當 $b^2 > 4c$。三個條件缺一不可。

第 (iii) 部分

設 $g(x) = x^3 + px + q$，所以 $g'(x) = 3x^2 + p$。實係數三次方程連重數（multiplicity）計算共有三個根，而它的非實根以共軛複數（complex conjugate）成對出現。另外請注意，在兩種情況下都有 $g(0) = q < 0$。

$p > 0$、$q < 0$ 的情況。 這裏對所有 x 都有 $g'(x) = 3x^2 + p > 0$，所以 g 嚴格遞增（strictly increasing），恰好有一個實根。由於 $g(0) = q < 0$ 而 g 遞增，這個根是正數。餘下的兩個根是一對非實數的共軛複數。

所以有一個實根，它是正數而且是單根（simple root），另有兩個非實數的共軛複根。

$p < 0$、$q < 0$ 的情況。 設 $p = -3a^2$，其中 $a > 0$，即 $a = \sqrt{-p/3}$。那麼 $g'(x) = 3(x^2 - a^2)$，所以 g 在 $(-\infty, -a]$ 上遞增，在 $[-a, a]$ 上遞減，在 $[a, \infty)$ 上遞增。在 $x = -a$ 處有局部極大值，在 $x = a$ 處有局部極小值，並且

$$g(-a) = -a^3 + 3a^3 + q = 2a^3 + q, \qquad g(a) = a^3 - 3a^3 + q = q - 2a^3.$$

由於 $q < 0$，局部極小值 $g(a)$ 是負數。在 $[0, a]$ 上，g 由 $g(0) = q < 0$ 開始遞減，所以在該區間內沒有根。在 $[a, \infty)$ 上，它由 $g(a) < 0$ 遞增至 $+\infty$，所以恰好有一個大於 a 的根，這個根是正數。任何其他實根必定位於 $(-\infty, -a]$ 或 $(-a, 0)$ 內，所以是負數；而這樣的根是否存在，只取決於局部極大值 $g(-a)$ 的正負。

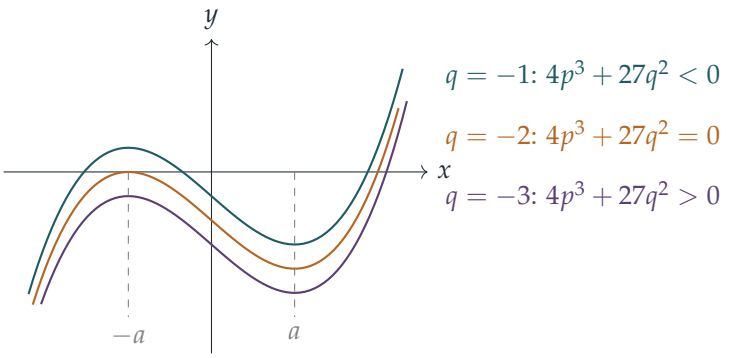
想一想 $g(-a)$ 的正負與 $4p^3+27q^2$ 有甚麼關係？

把兩個轉向點的函數值相乘：

$$g(-a)\,g(a)=(q+2a^3)(q-2a^3)=q^2-4a^6=q^2-4\left(-\frac{p}{3}\right)^3=\frac{4p^3+27q^2}{27}.$$

由於 $g(a)<0$，$g(-a)$ 的正負與 $4p^3+27q^2$ 的正負相反。共有三種情況。

- $4p^3+27q^2>0$。此時 $g(-a)<0$，所以在整個 $(-\infty,a]$ 上都有 $g<0$（它先遞增至負值 $g(-a)$，然後遞減）。唯一的實根就是那個正根。與之前一樣，有一個正實根和兩個非實數的共軛複根。
- $4p^3+27q^2=0$。此時 $g(-a)=0$ 且 $g'(-a)=0$，所以 $x=-a$ 是重根（repeated root）。由於各根之和為 0（方程沒有 x^2 項），第三個根是 $2a$。三個根是 $-a$、$-a$、$2a$：一個負的二重根和一個正的單根，全部都是實數。
- $4p^3+27q^2<0$。此時 $g(-a)>0$。由於當 $x\to-\infty$ 時 $g(x)\to-\infty$，在 $(-\infty,-a)$ 內有一個根。由於 $g(-a)>0>g(0)$，在 $(-a,0)$ 內還有一個根。連同大於 a 的那個根，共有三個相異實根：兩負一正。



草圖顯示了 $q=-1$、-2、-3 時的 $y=x^3-3x+q$（即 $p=-3$，$a=1$）：把局部極大值提升至越過軸，一個實根就變成三個。

在 $q<0$ 的每一種情況下，都恰好有一個正根；這與各根之積為 $-q>0$ 一致。

驗算

- 取 $p=-3$、$q=-1$，得 $4p^3+27q^2=-108+27=-81<0$，而數值計算所得的根約為 -1.532、-0.347 和 1.879：兩負一正，與預測相符。
- 取 $p=-3$、$q=-2$：$4p^3+27q^2=0$，而 $x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2)$，得出根 $-1,-1,2$。

- 在每種情況下，對數千組隨機的 (p, q) 使用數值求根程式，並以隨機的 (b, c) 檢驗 (ii) 中的條件，結果與上述每一項結論都吻合。

常見錯誤

- 在 (ii) 中只給出 $b < 0$ 和 $c > 0$（這兩個條件只保證如果根是實數，它們便是正數），而忘記了 $b^2 > 4c$。
- 在 (ii) 中只證明必要性，或只證明充分性。「必要且充分」需要兩個方向都證明。
- 在 (iii) 中忘記了邊界情況 $4p^3 + 27q^2 = 0$，此時有重根。

STEP 之外

$-(4p^3 + 27q^2)$ 這個量是三次式 $x^3 + px + q$ 的判別式（discriminant），與 $b^2 - 4ac$ 完全對應。它等於各根兩兩之差的平方之積，所以它為零當且僅當有重根，而它為正數當且僅當三個根都是實數且互不相同。判別式，以及根與係數之間的關係，通向伽羅瓦理論（Galois theory）以及「哪些方程可用根式求解（solvable by radicals）」這個問題。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）是很好的入門讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。