詳細解答

STEP I 2006，第 2 題

純數學 • 面積與最優化

> **STEP I 2006，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q2

關鍵思路

用一個數來確定繫繩點的位置，即它與其中一個角的距離 x，然後跟着繩子看它怎樣繞過穀倉。這樣，吃草區域便分成一個半圓（semicircle）和四個四分之一圓（quarter-circle），它們的半徑都是 x 的簡單線性函數。因此 A 是 x 在一個閉區間（closed interval）上的二次函數（quadratic），題目的兩個部分都歸結為求它的最大值和最小值。

解答

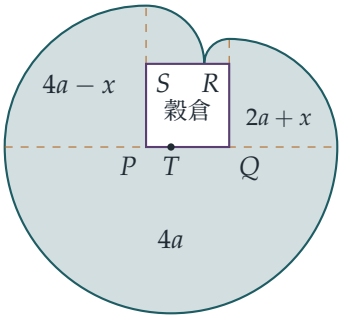
建立模型

把穀倉標記為 $PQRS$，山羊繫在邊 PQ 上的點 T，其中 $PT = x$，$TQ = 2a - x$，$0 \leq x \leq 2a$。根據對稱性（symmetry），山羊繫在哪一條邊上並無分別。

若由 T 出發、避開穀倉而到達某一點的最短路徑的長度不超過 $4a$，山羊便能到達該點。繩子拉緊時，這條路徑除了在穀倉的角上轉彎之外，都是直線。由 T 起繞着穀倉看：

- PQ **的前方**。直線 PQ 另一側的每一點，都可以由 T 直接看見，所以山羊可吃到一個半徑為 $4a$ 的半圓內的草。
- PS **和** QR **的旁邊**。繩子繞過 P 之後，餘下的長度是 $4a - x$，它沿着邊 PS 掃出一個以 P 為圓心的四分之一圓。同樣，在 Q 處餘下 $4a - (2a - x) = 2a + x$，於是沿着 QR 得到一個以 Q 為圓心的四分之一圓。
- **穀倉的後方**。由於 $x \leq 2a$，我們有 $4a - x \geq 2a$，所以繩子可到達 S，而且還餘下 $(4a - x) - 2a = 2a - x$，這段繩子在邊 SR 的後方掃出一個以 S 為圓心的四分之一圓。同理，繩子到達 R 時還餘下 $(2a + x) - 2a = x$，於是得到一個以 R 為圓心、半

徑為 x 的四分之一圓。



想一想 穀倉後方的兩塊區域會否重疊，以致我們把某些草地重複計算了兩次？

以 S 和 R 為圓心的兩個四分之一圓位於直線 SR 的同一側。它們的半徑 $2a - x$ 和 x 加起來等於 $2a = SR$，所以兩個圓剛好在 SR 上與 S 相距 $2a - x$ 的那一點相切。因此它們並不重疊，而兩者合起來，山羊可到達整條邊 SR。其他各塊區域也互不重疊：半圓位於直線 PQ 的一側，四個四分之一圓則位於另一側，各自佔據穀倉旁邊或後方的一個區域。此外，穀倉後方的一點能夠到達，當且僅當它與 S 或 R 的距離不超過該處餘下的繩長，所以沒有遺漏任何地方。

面積

把半圓和四個四分之一圓加起來，

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}\pi(4a)^2 + \tfrac{1}{4}\pi\left[(4a-x)^2 + (2a+x)^2 + (2a-x)^2 + x^2\right] \\ &= 8\pi a^2 + \tfrac{1}{4}\pi\left(4x^2 - 8ax + 24a^2\right) \\ &= \pi\left(x^2 - 2ax + 14a^2\right) \\ &= \pi\left[(x-a)^2 + 13a^2\right]. \end{aligned}$$

這條公式對 $[0, 2a]$ 內的每一個 x 都成立。在兩個端點（$x = 0$ 或 $x = 2a$，即山羊繫在角上），其中一個四分之一圓縮成一點，而半圓與半徑為 $4a$ 的四分之一圓則合併成四分之三個圓，正如我們所預期。

最大值與最小值

在 $0 \le x \le 2a$ 上，我們有 $-a \le x - a \le a$，所以 $0 \le (x-a)^2 \le a^2$。因此

$$13\pi a^2 \le A \le 14\pi a^2,$$

這就證明了 $A \leq 14\pi a^2$。右邊的等號恰好在 $x = 0$ 或 $x = 2a$ 時成立，即山羊繫在角上的時候。左邊的界在 $x = a$ 時取得，所以 A 的最小值是

$$A_{\min} = 13\pi a^2,$$

在山羊繫於一條邊的中點時取得。

驗算

- 在角上（$x = 0$），我們得到四分之三個半徑為 $4a$ 的圓（$12\pi a^2$）、繞過鄰邊遠端那個角的一個半徑為 $2a$ 的四分之一圓（πa^2），以及穀倉後方一個半徑為 $2a$ 的四分之一圓（πa^2）。合共 $14\pi a^2$，與公式相符。
- 我們取 $a = 1$，在一個細密的網格上估算吃草面積，逐點按它繞過穀倉的真正最短距離（一條直線，或在角上轉彎的折線）來判斷。繫於中點時得 40.845，而 $13\pi \approx 40.841$；繫於角上時得 43.988，而 $14\pi \approx 43.982$；其他繫繩點的結果也同樣吻合。

常見錯誤

- 忘記了穀倉後方的區域：繩子的長度足以在每一邊繞過兩個角。
- 擔心穀倉後方的兩塊區域重疊，或在計算中硬加入重疊部分。它們的半徑之和永遠恰好是 $2a$，所以兩個圓只是相切。

STEP 之外

拉緊的繩子所走的是一條測地線（geodesic），即在有障礙物的區域內的最短路徑。在這裏，它由若干直線段組成，只在穀倉的角上轉彎，所以山羊能到達的點集，是在一種非歐幾里得（non-Euclidean）的距離量度方式下的一個「球」。繞過障礙物的最短路徑，通向變分法（calculus of variations），也通向計算機科學中的運動規劃（motion planning）問題。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 收錄了更多這類題目，當中只要仔細分情況討論，便可把幾何問題化為簡單的代數。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。