詳細解答

STEP I 2006，第 13 題

概率與統計 • 泊松混合分佈

STEP I 2006，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/06-s1-q13

關鍵思路

鑽石以固定的平均率獨立地散佈，這就是一個泊松過程（Poisson process），因此 m 公斤朱古力中的鑽石數目服從平均值為 m 的泊松分佈（Poisson distribution）。朱古力的份量本身也是隨機的，所以我們以它為條件：先就固定的份量求出答案，再利用全概率定理（law of total probability）（以及它在期望值方面的對應版本）對擲骰結果取平均。這樣每一部分都歸結為級數求和：(i) 是有限級數，(ii) 是幾何級數（geometric series）。

解答

設 D 為我找到的鑽石數目。由於鑽石是以每公斤平均一顆的比率獨立地藏在朱古力中，質量為 m kg 的一排朱古力所含的鑽石數目服從平均值為 m 的泊松分佈。特別地，已知質量為 m kg 時，

$$\mathrm{P}(D=0)=\mathrm{e}^{-m}, \qquad \mathrm{E}(D)=m.$$

以下一律把 $100k$ 克寫成 $0.1k$ 公斤。

第 (i) 部分

設 N 為骰子擲出的點數，則對 $n=1,\ldots,6$ 有 $\mathrm{P}(N=n)=\frac{1}{6}$。已知 $N=n$ 時，我買 $0.1n$ kg，所以 $D \mid N=n$ 服從平均值為 $0.1n$ 的泊松分佈。由全概率定理，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D=0) &= \sum_{n=1}^{6} \mathrm{P}(N=n)\,\mathrm{P}(D=0 \mid N=n) = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{6} \mathrm{e}^{-0.1n} \\ &= \frac{1}{6}\left(\mathrm{e}^{-0.1}+\mathrm{e}^{-0.2}+\cdots+\mathrm{e}^{-0.6}\right).\end{aligned}$$

這是一個幾何級數，首項為 $\mathrm{e}^{-0.1}$，公比（common ratio）為 $\mathrm{e}^{-0.1}$，共有六項，所以

$$\mathrm{P}(D=0)=\frac{\mathrm{e}^{-0.1}}{6}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-0.6}}{1-\mathrm{e}^{-0.1}}\right),$$

正是所求。

至於期望值（expectation），我們用同樣的方法取條件：

$$\mathrm{E}(D)=\sum_{n=1}^{6}\mathrm{P}(N=n)\,\mathrm{E}(D\mid N=n)=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{6}0.1n=\frac{0.1\times 21}{6}=0.35.$$

換言之，$\mathrm{E}(D)=0.1\,\mathrm{E}(N)=0.1\times 3.5$，這正是我們要證明的結果。

第 (ii) 部分

現在設 T 為首次擲出 6 點時的擲骰次數。各次擲骰互相獨立，而 $T=t$ 表示先擲出 $t-1$ 次非 6 點，然後擲出一次 6 點，所以

$$\mathrm{P}(T=t)=\left(\tfrac{5}{6}\right)^{t-1}\tfrac{1}{6},\qquad t=1,2,3,\ldots$$

已知 $T=t$ 時，我買 $0.1t$ kg，所以 $\mathrm{P}(D=0\mid T=t)=\mathrm{e}^{-0.1t}$。因此

$$\mathrm{P}(D=0)=\sum_{t=1}^{\infty}\left(\tfrac{5}{6}\right)^{t-1}\tfrac{1}{6}\,\mathrm{e}^{-0.1t}=\frac{\mathrm{e}^{-0.1}}{6}\sum_{t=1}^{\infty}\left(\tfrac{5}{6}\mathrm{e}^{-0.1}\right)^{t-1}.$$

? **想一想** 為甚麼我們可以把這個級數求和至無窮？

這是一個公比為 $r=\frac{5}{6}\mathrm{e}^{-0.1}$ 的幾何級數，而 $0<r<1$，所以它收斂（converge），其和為 $1/(1-r)$。於是

$$\mathrm{P}(D=0)=\frac{\mathrm{e}^{-0.1}}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{6}\mathrm{e}^{-0.1}}=\frac{\mathrm{e}^{-0.1}}{6-5\mathrm{e}^{-0.1}},$$

其中分子和分母同乘以 6。這就是所求的結果。

至於鑽石數目的期望值，

$$\mathrm{E}(D)=\sum_{t=1}^{\infty}\mathrm{P}(T=t)\,\mathrm{E}(D\mid T=t)=\sum_{t=1}^{\infty}\left(\tfrac{5}{6}\right)^{t-1}\tfrac{1}{6}\times 0.1t=\frac{0.1}{6}\sum_{t=1}^{\infty}t\left(\tfrac{5}{6}\right)^{t-1}.$$

題目的提示在這裏派上用場。當 $|x|<1$ 時，由二項展開式（binomial expansion）可得

$$(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots=\sum_{t=1}^{\infty}tx^{t-1}.$$

取 $x=\frac{5}{6}$，這個和就是 $\left(1-\frac{5}{6}\right)^{-2}=36$，所以

$$\mathrm{E}(D)=\frac{0.1}{6}\times 36=0.6.$$

這同樣等於 $0.1\,\mathrm{E}(T)$，其中 $\mathrm{E}(T)=6$ 就是大家熟悉的、擲出一次 6 點所需擲骰次數的平均值。

驗算

- 按數值計算，(i) 的概率約為 0.7150，(ii) 的概率約為 0.6131。以泊松分佈產生鑽石數目，模擬 2×10^5 位顧客，所得的結果為 0.7151 和 0.6136，而鑽石數目的平均值則為 0.350 和 0.599。
- (ii) 的概率比 (i) 的小。這是合理的：我平均買 600 g，而不是 350 g。
- 兩個期望值都是那個隨機乘數的平均值的 0.1 倍。鑽石數目的期望值等於公斤數的期望值，因為已知質量時，鑽石數目的期望值是質量的線性函數。

常見錯誤

- 以 $\mathrm{e}^{-0.35}$（或 $\mathrm{e}^{-0.6}$）作為沒有鑽石的概率。這樣只用到平均質量，但 e^{-m} 並不是 m 的線性函數，所以必須先取 e^{-m} 再求平均，而不是先求平均。期望值是線性的，所以這條捷徑對 $\mathrm{E}(D)$ 確實行得通。
- 忘記把克換算成公斤，結果得到平均值 $100n$ 而不是 $0.1n$。
- 寫成 $\mathrm{P}(T = t) = (\frac{5}{6})^t \frac{1}{6}$，這樣便多算了一次非 6 點。

STEP 之外

這裏泊松分佈的參數本身是隨機的，這使 D 成為一個混合（mixture）分佈。所用的工具，即全概率定理和重期望定律（tower law）$\mathrm{E}(D) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(D \mid T)\big)$，都是大學一年級概率論的核心內容。概率母函數（probability generating function）可以俐落地處理這類問題：$\mathrm{P}(D = 0)$ 就是 T 的母函數在 $\mathrm{e}^{-0.1}$ 處的值。先定出隨機的試驗次數，再在每次試驗中取一個隨機的數目，由此便可進一步引出複合分佈（compound distribution）和分支過程（branching process）。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）對以上各項都有詳細闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。