詳細解答

STEP I 2006，第 12 題

概率與統計 • 條件概率

STEP I 2006，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/06-s1-q12

關鍵思路

一條道路要暢通，必須路上每一段都暢通；而兩鎮要被隔絕，則必須每一條道路都受阻。因此我們逐條道路處理，利用獨立性（independence），並且每一步都借助補事件（complement）來計算。第二部分是一個條件概率（conditional probability）問題，當中選了哪條路是有影響的：只有一段的道路比有兩段的道路更可能暢通，所以發現自己所選的路暢通，其實透露了你選的是哪條路的一些訊息。我們用定義 $\mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(A \cap B)/\mathrm{P}(A)$ 來處理，並按所選的道路分情況計算。

解答

被隔絕的概率

把兩條有兩段的道路稱為 R_1 和 R_2，只有一段的道路稱為 R_3。設 $q = 1 - p$ 為單獨一段暢通的概率。

一條有兩段的道路暢通，當且僅當它的兩段都暢通；由獨立性，其概率為 $q^2 = (1-p)^2$。所以

$$\mathrm{P}(R_1 \text{ 受阻}) = \mathrm{P}(R_2 \text{ 受阻}) = 1 - (1-p)^2 = p(2-p),$$
$$\mathrm{P}(R_3 \text{ 受阻}) = p.$$

三條道路共用到五個不同的路段，所以「R_1 受阻」、「R_2 受阻」和「R_3 受阻」這三個事件各自取決於互不相交的幾組獨立路段，因而互相獨立。Oxtown 與 Camville 被隔絕，當且僅當三條道路全部受阻，所以

$$\mathrm{P}(\text{被隔絕}) = p(2-p) \cdot p(2-p) \cdot p = p^3(2-p)^2,$$

正如所求。

條件概率

設 C_k 為我選擇道路 R_k 的事件，則對每個 k 都有 $\mathrm{P}(C_k) = \frac{1}{3}$，而且我的選擇與水浸情況獨立。設 O 為我所選的路暢通的事件，B 為另外兩條路都受阻的事件。我們要求的是 $\mathrm{P}(B \mid O) = \mathrm{P}(B \cap O)/\mathrm{P}(O)$。

> ? **想一想** 根據獨立性，答案不就是 P(另外兩條路受阻) 嗎？

假如我們知道自己選了哪條路，答案確是如此。但「另外兩條路」是哪兩條，要視乎我們的選擇而定；而且觀察到自己的路暢通之後，選中較短的 R_3 的可能性就比原先高了。所以我們必須按所選的道路分情況，並配上正確的權重，而下面的公式做的正是這件事。

分母。對所選的道路運用全概率公式（law of total probability），

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(O) &= \tfrac{1}{3}(1-p)^2 + \tfrac{1}{3}(1-p)^2 + \tfrac{1}{3}(1-p) \\ &= \tfrac{1}{3}(1-p)[2(1-p)+1] = \tfrac{1}{3}(1-p)(3-2p).\end{aligned}$$

分子。如果我選了 R_1，就需要 R_1 暢通而 R_2、R_3 受阻；由各條道路的獨立性，其概率為 $(1-p)^2 \cdot p(2-p) \cdot p$。選 R_2 的結果相同。如果我選了 R_3，就需要 R_3 暢通而兩條有兩段的道路都受阻：$(1-p) \cdot p^2(2-p)^2$。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B \cap O) &= \tfrac{1}{3}\left[2p^2(2-p)(1-p)^2 + p^2(2-p)^2(1-p)\right] \\ &= \tfrac{1}{3}\,p^2(1-p)(2-p)[2(1-p)+(2-p)] \\ &= \tfrac{1}{3}\,p^2(1-p)(2-p)(4-3p).\end{aligned}$$

答案。兩式相除，並約去因子 $\frac{1}{3}(1-p)$（當 $p < 1$ 時它不等於零），得

$$\mathrm{P}(B \mid O) = \frac{p^2(2-p)(4-3p)}{3-2p}.$$

因子 p、$2-p$、$4-3p$ 和 $3-2p$ 全都是一次式，所以這已經是完全因式分解的形式。

極限 $p \to 1$

當 $p \to 1$ 時，每個因子都趨向 1，所以

$$\mathrm{P}(B \mid O) \to \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{1} = 1.$$

這是合理的。當水浸幾乎必然發生時，我自己的路暢通純屬僥倖；而其他道路是否水浸與我的路獨立，它們幾乎肯定沒有同樣的運氣：知道我的路暢通，並不能說明它們是否

暢通。所以我應該幾乎肯定，換了任何其他選擇都會行不通。（在 $p = 1$ 本身，作為條件的事件概率為零，條件概率沒有定義；只有極限才有意義。）

驗算

- 當 $p = 0$ 時，沒有任何路段會受阻，而公式給出 0，正該如此。
- 當 $p = \frac{1}{2}$ 時，公式給出 $\dfrac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}{2} = \frac{15}{32}$。把路段受阻的全部 2^5 種情況和三種道路選擇逐一精確列舉，得到的數值相同；對其他幾個 p 值也是如此，例如 $p = \frac{2}{3}$ 時得 $\frac{32}{45}$。
- 對 $0 \leq p < 1$，答案總是介乎 0 與 1 之間：例如當 $p = 0.99$ 時，它約為 0.9996。

常見錯誤

- 把有兩段的道路受阻的概率當作 p^2（兩段都受阻），而不是 $1 - (1 - p)^2$（至少一段受阻）。
- 忘記取條件：另外兩條路受阻的概率，與已知我隨機選中的路暢通時它的條件概率，並不相同。
- 在觀察之後仍把三個選擇看成權重相等；相等的是先驗概率（prior probability）$\frac{1}{3}$，而不是後驗概率（posterior probability）。

STEP 之外

多條道路並聯、每條道路又由若干路段串聯而成，是**可靠性網絡**（reliability network）最簡單的例子；一個網絡能把兩點連通的概率，其一般情況是滲流理論（percolation theory）的研究對象，而當 p 變化時網絡行為出現的急劇轉變，正是該理論的核心課題。第二部分其實是喬裝了的貝葉斯定理（Bayes' theorem）：「我的路暢通」這項觀察，更新了選中各條道路的概率。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）正是以這種思路講解條件概率和獨立性。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。