詳細解答

STEP I 2006，第 11 題

力學 • 彈性碰撞

STEP I 2006，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/06-s1-q11

關鍵思路

我們無法逐次追蹤每一次碰撞：我們連 $A_1, \ldots, A_{n-2}$ 的質量也不知道。因此我們只考慮最終狀態。有兩項事實限制着最終狀態。第一，動量（momentum）和動能（kinetic energy）在結束時與開始時相同。第二，所有碰撞結束之後，沒有任何粒子能追上它前面的粒子，所以最終速度沿着槽（弱）遞增。於是每一部分都只需一段簡短的論證，說明這兩項事實容許哪些最終狀態。

解答

建立模型

我們把各粒子視為在一條直線上無摩擦地運動的質點，而每次碰撞都是完全彈性（perfectly elastic）的。取 A_0 初始運動的方向為正方向，並設 v_k 為 A_k 的最終速度（$k = 0, 1, \ldots, n$）。以 m_k 表示 A_k 的質量，所以 $m_0 = m_{n-1} = m$ 而 $m_n = \lambda m$。由守恆（conservation）定律得

$$\sum_{k=0}^{n} m_k v_k = mu, \tag{M}$$

$$\sum_{k=0}^{n} m_k v_k^2 = mu^2. \tag{E}$$

粒子在槽內不能互相越過，所以它們一直保持 $A_0, A_1, \ldots, A_n$ 的次序。假如最終對某個 k 有 $v_k > v_{k+1}$，那麼 A_k 便會追上 A_{k+1}，於是還會再有一次碰撞。因此在所有碰撞結束之後

$$v_0 \leq v_1 \leq \cdots \leq v_n. \tag{O}$$

特別地，向前運動的粒子前面不能有靜止的粒子，而向後運動的粒子後面也不能有靜止的粒子。

第 (i) 部分

假設最終只有 A_j 在運動，速度為 v。那麼由 (M) 和 (E) 得 $m_j v = mu$ 及 $m_j v^2 = mu^2$。兩式相除，得 $v = u$，從而 $m_j = m$。

由於 $v = u > 0$，次序條件 (O) 要求 A_j 前面每一個粒子的速度都至少為 u。但它們全部靜止，所以前面根本沒有粒子，即 $A_j = A_n$。然而 A_n 的質量是 $\lambda m \neq m$，因為 $\lambda > 1$。這是一個矛盾（contradiction），所以最終不可能恰好只有一個粒子在運動。

第 (ii) 部分

假設只有 A_{n-1} 和 A_n 在運動，速度分別為 p 和 q。把 (M) 和 (E) 除以 m，

$$p + \lambda q = u, \qquad p^2 + \lambda q^2 = u^2.$$

把 $p = u - \lambda q$ 代入第二條方程，得 $-2\lambda uq + \lambda^2 q^2 + \lambda q^2 = 0$，即

$$\lambda q((1+\lambda)q - 2u) = 0.$$

因為 A_n 在運動，我們需要 $q \neq 0$，所以

$$q = \frac{2u}{1+\lambda}, \qquad p = u - \frac{2\lambda u}{1+\lambda} = -\frac{(\lambda-1)u}{1+\lambda} < 0.$$

所以 A_{n-1} 會向後運動。但 $n \geq 2$，所以它後面有一個粒子 A_{n-2}，而按假設該粒子是靜止的。於是 $v_{n-2} = 0 > p = v_{n-1}$，這與 (O) 矛盾：$A_{n-1}$ 會撞上 A_{n-2}。所以這個最終狀態同樣不可能出現。

第 (iii) 部分

這裏的主要工具是以下事實。

引理（lemma）。在運動結束時，必有某個粒子向後運動。

證明。假設相反，即對每個 k 都有 $v_k \geq 0$。由 (O)，v_n 是最大的速度。(E) 中的每一項都滿足 $m_k v_k^2 \leq v_n m_k v_k$，因為 $0 \leq v_k \leq v_n$ 而 $m_k > 0$。把這些不等式相加並利用 (M)，

$$mu^2 = \sum m_k v_k^2 \leq v_n \sum m_k v_k = v_n\, mu, \qquad \text{所以} \qquad v_n \geq u.$$

另一方面，(M) 中的每一項都是非負的，所以單獨一項 $\lambda m v_n$ 不會超過總和：

$$\lambda m v_n \leq mu, \qquad \text{所以} \qquad v_n \leq \frac{u}{\lambda} < u,$$

這裏用到 $\lambda > 1$ 和 $u > 0$。這兩個界互相矛盾。 □

想一想 題目從來沒有給出 $A_1, \ldots, A_{n-2}$ 的質量。為甚麼這並不要緊？

引理只用到 (M)、(E)、(O) 以及 A_n 的質量，所以無論其他質量是多少，它都成立。正因如此，這道題才有可能解答。

現在假設最終只有 A_{n-2}、A_{n-1} 和 A_n 在運動。

若 $n \geq 3$，則 A_{n-2} 後面有一個靜止的粒子 A_{n-3}。由 (O)，$v_{n-2} \geq v_{n-3} = 0$，從而 $v_{n-1}, v_n \geq v_{n-2} \geq 0$。每個粒子的速度都 ≥ 0，而這是引理所不容許的。

若 $n = 2$，這三個粒子就是 A_0、A_1、A_2，亦即全部粒子，而整個運動是完全確定的。當 A_0 撞上 A_1 時（兩者質量相等），速度互相交換：A_0 停下，而 A_1 以速率 u 繼續前進。然後 A_1 撞上 A_2，按第 (ii) 部分的計算（碰撞前的速度為 u 和 0），它以速度 $-\frac{(\lambda-1)u}{\lambda+1}$ 反彈，而 A_2 則以 $\frac{2u}{\lambda+1}$ 離開。最後 A_1 撞上靜止的 A_0，質量相等的兩者再次交換速度。此後，A_0 向後運動，A_1 靜止，A_2 向前運動，所以 (O) 成立，不會再有碰撞。A_1 最終靜止，所以三個粒子全部都在運動同樣是不可能的。

第 (iv) 部分

假設最終恰好有兩個粒子在運動。由 (M)，總動量為 $mu > 0$，所以其中至少一個向前運動。由引理，至少一個向後運動。所以其中一個，設為 A_i，有 $v_i < 0$，而另一個 A_j 有 $v_j > 0$。

想一想 這兩個粒子可以是哪兩個？

由 (O)，A_i 後面每一個粒子的速度都 $\leq v_i < 0$，所以它在運動。但另外在運動的只有 A_j，而它是向前運動的，所以 A_i 後面沒有任何粒子：$A_i = A_0$。同樣地，A_j 前面每一個粒子的速度都 $\geq v_j > 0$，所以前面沒有粒子，即 $A_j = A_n$。

所以在運動的是 A_0（質量 m）和 A_n（質量 λm），速度分別為 $a < 0$ 和 $b > 0$。方程 (M) 和 (E) 成為

$$a + \lambda b = u, \qquad a^2 + \lambda b^2 = u^2,$$

與第 (ii) 部分的方程完全一樣。由於 $b \neq 0$，

$$b = \frac{2u}{\lambda+1}, \qquad a = -\frac{(\lambda-1)u}{\lambda+1}.$$

因此，在運動的兩個粒子是 A_0，以速率 $\dfrac{(\lambda-1)u}{\lambda+1}$ 向後運動，以及 A_n，以速率 $\dfrac{2u}{\lambda+1}$ 向前運動。

這種情況確實可以發生：第 (iii) 部分中 $n = 2$ 的情形正是以這個狀態告終。

驗算

- 取 $\lambda = 3$ 和 $u = 4$，兩個速率是 2 和 2。於是動量為 $m(-2) + 3m(2) = 4m$，能量為 $\frac{1}{2}m(4) + \frac{1}{2}(3m)(4) = 8m = \frac{1}{2}m(16)$，與應有的結果相符。
- 當 $\lambda \to 1$ 時，A_0 的最終速率趨向 0，而 A_n 的最終速率趨向 u：當所有質量都相等時，速度只是沿着整列粒子逐一傳遞下去，就像牛頓擺（Newton's cradle）一樣。
- 我們對 60,000 個隨機設定模擬了整個碰撞過程（n 由 2 至 6，$A_1, \ldots, A_{n-2}$ 的質量隨機，λ 和間距亦隨機）。A_0 最終總是向後運動，(i)–(iii) 中的最終狀態從未出現，而每當恰好有兩個粒子在運動時，它們都是 A_0 和 A_n，速率亦與上文所得相同。

常見錯誤

- 試圖追蹤每一次碰撞。中間各粒子的質量是未知的，所以只能分析最終狀態。
- 忘記次序條件 (O)。單憑守恆定律，第 (ii) 部分的狀態是容許的；把它排除的正是次序條件。
- 假定 A_{n-2} 不是 A_0。當 $n = 2$ 時它正是，而第 (iii) 部分需要另作一個（簡短的）論證。

STEP 之外

這個引理是兩個守恆量之間的一個不等式：當所有速度都非負時，能量不能超過（最大速度）$\times$（動量）。這類論證利用守恆量和次序關係來排除某些最終狀態，而無須解出整個動力學過程，在多粒子系統的研究中十分典型。下一步不妨閱讀 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論），書中對碰撞、質心參考系（centre-of-mass frame）和守恆定律都有細緻的處理。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。