詳細解答

STEP I 2006，第 10 題

力學 • 拋體運動

> **STEP I 2006，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q10

關鍵思路

軌跡（trajectory）是一條拋物線（parabola），屋頂是一條直線，所以「剛好碰到」的意思就是這條直線是一條*切線*（tangent）：把其中一條方程代入另一條，會得到一條關於 x 的二次方程（quadratic），而且它有重根（repeated root）。至於正負號的問題，只要問這個重根位於何處便可解決。在最後一部分，兩個質點只可能在 P 碰到屋頂的那一點相遇，所以 Q 必須恰好在 P 到達該點的那一刻到達；比較兩者在該時刻的水平位置，便得出結果。

解答

軌跡

把 P 看成一個只受重力作用而自由運動的質點（particle），不計空氣阻力。它的初速度在水平和垂直方向的分量都是 $V\cos 45^\circ = V/\sqrt{2}$，所以在時間 t

$$x = \frac{Vt}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{Vt}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

利用 $t = \sqrt{2}\,x/V$ 消去時間，得 $\frac{1}{2}gt^2 = gx^2/V^2$，所以軌跡是

$$y = x - \frac{gx^2}{V^2}.$$

碰到屋頂

P 與屋頂相遇之處滿足 $x - gx^2/V^2 = x\tan\alpha + b$，即

$$\frac{g}{V^2}\,x^2 + (\tan\alpha - 1)\,x + b = 0. \qquad (*)$$

相切（而不是穿過）表示 $(*)$ 有重根，所以它的判別式（discriminant）等於零：

$$(\tan\alpha - 1)^2 = \frac{4gb}{V^2} \quad \Longrightarrow \quad V(\tan\alpha - 1) = \pm 2\sqrt{bg}.$$

想一想 兩個正負號都滿足判別式的條件。怎樣分辨該取哪一個？

$(*)$ 的重根是

$$x_0 = -\frac{(\tan\alpha - 1)V^2}{2g} = \frac{(1 - \tan\alpha)V^2}{2g}.$$

質點沿 x 遞增的方向運動（因為 $x = Vt/\sqrt{2}$），所以它只可能在 $x_0 > 0$ 之處碰到屋頂。這就迫使 $\tan\alpha - 1 < 0$，而由於 $V > 0$，左邊的 $V(\tan\alpha - 1)$ 是負數。因此

$$V(-1 + \tan\alpha) = -2\sqrt{bg},$$

這正是所要證明的。（若取正根，切點便會在 $x_0 < 0$ 之處，即位於拋物線向後延伸的部分，而 P 從不經過那裏。）從幾何上看，屋頂的斜度必須小於初始運動方向的斜度，即 $\alpha < 45°$；否則屋頂一直在直線 $y = x$ 之上，而拋物線在 $x > 0$ 時位於該直線之下。

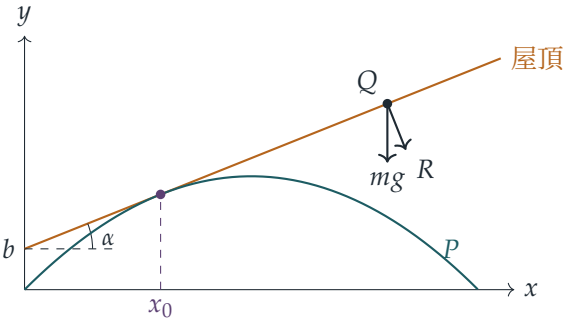
相切的時刻

由於 $x = Vt/\sqrt{2}$，相切的時刻是

$$T = \frac{\sqrt{2}\,x_0}{V} = \frac{\sqrt{2}\,(1 - \tan\alpha)V}{2g} = \frac{V(1 - \tan\alpha)}{\sqrt{2}\,g}.$$

路軌上的質點

把 Q 看成一個在光滑（smooth）路軌上的質點，路軌沿直線 $y = x\tan\alpha + b$；它從 $(0, b)$ 沿路軌向 x 遞增的方向射出（必須如此，才能到達 P，因為後者的 x 永遠是正數）。作用於 Q 的力有它的重量 mg，以及路軌對它的法向反作用力（normal reaction）R，後者垂直於路軌。下圖顯示了這些力，以及 P 的路徑在 $x = x_0$ 處與屋頂相切的情況。



由於沒有摩擦力，沿路軌向斜上方分解，得

$$m\ddot{s} = -mg\sin\alpha,$$

其中 s 是 Q 沿路軌與 $(0,b)$ 的距離。以 $s=0$ 及 $\dot{s}=U$ 作為 $t=0$ 時的初始條件，

$$s = Ut - \tfrac{1}{2}gt^2\sin\alpha, \qquad x_Q = s\cos\alpha.$$

P 除了在切點之外從不在屋頂上，而 Q 則一直在屋頂上，所以兩個質點要相碰，唯一的可能是 Q 在時間 T 位於該點。那時兩個質點都在屋頂所在的直線上，所以只需它們的 x 坐標在時間 T 相等：

$$\left(UT - \tfrac{1}{2}gT^2\sin\alpha\right)\cos\alpha = \frac{VT}{\sqrt{2}}.$$

兩邊除以 $T>0$，並代入 $gT = V(1-\tan\alpha)/\sqrt{2}$：

$$U\cos\alpha = \frac{V}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{V(1-\tan\alpha)}{\sqrt{2}}.$$

兩邊乘以 $2\sqrt{2}$，並利用 $\sin\alpha\cos\alpha\tan\alpha = \sin^2\alpha$，

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}\,U\cos\alpha &= 2V + V\sin\alpha\cos\alpha\,(1-\tan\alpha) \\ &= V\left(2 + \sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha\right), \end{aligned}$$

這就是所要求的結果。

驗算

- 單位：$V(1-\tan\alpha)/g$ 是速率除以加速度，所以是時間；而 $\sqrt{bg}$ 是速率，與 $V(\tan\alpha - 1)$ 一樣。
- 極限情況 $\alpha\to 0$(屋頂水平)：$b = V^2/(4g)$ 正是大家熟悉的最大高度 $(V\sin 45^\circ)^2/(2g)$，在 $T = V/(\sqrt{2}g)$ 時到達；而 Q 沿路軌方向不受力，所以它的速率必須與 P 的水平速率相同，即 $U = V/\sqrt{2}$。公式給出的正是這個結果。
- 數值驗算：取 $g=9.8$、$V=10$ 及 $\alpha = 0.3$ 弧度，切點位於 $x_0 \approx 3.524$。讓 Q 以推導所得的 U 沿路軌逐步前進，對隨機選取的 V 和 $\alpha < \pi/4$，它在時間 T 的位置與 P 的位置相差不超過 10^{-6}，而 P 在其他所有時刻都在屋頂之下。

常見錯誤

- 把 Q 的加速度寫成 $-g$ 或 $-g\cos\alpha$：只有重力沿路軌方向的分量 $g\sin\alpha$ 才沿路軌起作用。

- 把 U 當作水平速率：U 是沿路軌的速率，所以 Q 的水平位移是 $s\cos\alpha$。
- 只用「速率是正數」來解釋為何取負根。真正起決定作用的是 x_0 的正負號（等價於 $\tan\alpha < 1$）。

STEP 之外

相切條件是一個普遍想法的特殊情況：一族曲線所能到達的區域，其邊界就是這族曲線的包絡線（envelope），而求包絡線，歸根究底就是問一條二次方程何時有重根。對於以固定速率向各個方向拋出的拋體（projectile），包絡線就是所謂的「安全拋物線」（parabola of safety）。Q 的運動是最簡單的約束運動（constrained motion）；大學一年級的課程會用拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）有系統地處理約束。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對拋體和約束運動都有細緻的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。